





اثر

یاوران حضرت شهریاریدن

**بیکباشی رفعت**



معارف نظارت جلیله‌سنك رخصتیله

**درسعادت**

(قره‌بت) مطبعه‌سی — باب عالی جاده‌سنده

صاحبی: کتابجی قره‌بت

**۱۳۰۸**

## بعد اداى ماوجب علينا

عثمانليلر ايچون كمالات باهره و ترقيات عاليه‌سيله غبطه‌فرماى اعصار اولان دور فيضافيض همايونلرينى ادراك شرف عالمبهاسيله متشكر ومباهى بولنديغمز پادشاه معارف‌پرور و شهنشاه عواطف كستر سلطان الاعظم الغازى «عبد الحميد خان ثانى» افندمز حضرتلرينه يتيشانلر بختياردر. چونكه افكار مراحم‌دثار حضرت ولى نعمت اعظمى تبعهٔ شاهانه‌لرينك استفاضهٔ انوار معارفله ترفيه حال وتأمين سعادت استقباللرى جهتنه مصروفدر. مآثر شفقت ومرحمت جليلهٔ حضرت خلافتپناهينك حاصل ايتديكى حس شكران ومنت بوقوللرينى تحديث نعمت پادشاهى ايچون كمال عجزمله برابر اولانجه قدرتمله چالشمغه تشويق ايديور .

مکاتب عالیه اعدادیه‌لرنده تدریس اولنمقده اولان مثلثات درسی علوم ریاضیه‌نك اساسی مثابه‌سنده در. بو فن سایه‌سنده برچوق مسائل غامضه سهولتله حل اولندیغی کبی فن تخطیط اراضی ایله قوزموغرافیا وفنون سائره‌یی تدرس ایده‌جك برشاکرد مثلثاتك دستوراتنه وقوف پیدا ایتمینجه استفاده ایتمسی امکان خارجنده‌در. علوم ریاضیه‌یه دائر نشر ایتدکلری آثار عالیه ایله بحق اشتهار ایدن F. I. C جمعیتنك مثلثاته دائر اولان تألیفاتی غایت دقیق وبسیط اولدیغندن انك مأخذ اتخاذیله تدریس پروغرامنه موافق بر صورتده تعدیل وبعض یرلرینه علاوه ایده‌رك تحدیث نعمت مقصدیله و{تطبیقاتلی اصول مثلثات مستویه} نامیله اشبو کتابی نشره جسارت آلدم.

بضاعه‌سزلکمه بناءً اثرم خطادن سالم اوله‌مز. ارباب فطانت حسن نیت وخدمتمه اشتراك ایدرده

اثرمك خطيئاتنى تصحيح ايله اكمالنه بذل عنايت ايدر ايسه متشكر اولورم. اصول مثلثاتى لايقيله تدرس ايدنلره واسطهٔ استفاده اولمق اوزره مسائلك اصول تطبيقنى {مسائل مثلثاتيه} ناميله آيروجه نشر ايتمكه مجبوريت حس ايتدم.

چونكه بر فنك تحصيلندن مقصد استفاده جهتى اولمسنه نظراً تطبيقات علميه‌سنك بيلنمسى الزمدر.

نواقص وخطيأتمك حسن نيتمه باغشلانمسنى ارباب مروتدن تمنى ايدرم. بالوسيله ورد زبانم اولان دعاى تمادئ عمر وعافيت وازدياد شان وشوكت حضرت خلافتپناهى يى تذكار ايله اعلان افتخار ايلرم.

ومن الله التوفيق نعم المولى ونعم الرفيق

ياوران حضرت شهرياريدن بيكباشى

رفعت

بسم الله الرحمن الرحيم

# برنجی فصل

## خطوط مثلثاتیه

### باب اول

#### ( معلومات ابتدائیه )

۱ . ــ فن مثلثات علوم ریاضیه‌نك بر شعبه‌سی اولوب مقصد دخی برمثلثك اقسام اساسیه‌سنی بالحساب تعیین وتحدید ایتمکدر .

برمثلثك اقسام اساسیه‌سی ایسه اوچ ضلع دیکر اوچ زاویه اولمق اوزره التی شیدن عبارت اولوب اقسام مذکوره‌نك اوچی معلوم اولدقجه دیکر اوچی تعیین اولنه‌بیلورسه‌ده فقط بومعلوماتدن هیچ اولمازایسه بری ضلع اولمق هندسه ایله مثبتدر.

بر مثلثی حل ایتمك معلومات کافیه ایله مجهولات باقیه‌نك قیمت عددیه‌سنی تقدیر وتعیین ایتمکدر.

اصول هندسه‌ده معلوم اولان مثلثلر عملیات ترسیمیه ایله حل اولنورلرسه‌ده فقط کافهٔ مادی عملیاتده خطالر تولد ایده‌جکندن بو سببله ظهور ایدن نتیجه‌لر دائما یکده صحتـه مقرون

اولیوب نتایج مذکوره‌نك قیمت تقریبیه‌لری دخی تماماً تقدیر ایدیله‌مز حالبوکه بومثللو عملیات هندسیه حساب ایله مکملاً اجرا اولنه‌جغندن بشقه عملیات مذکوره نتیجه‌سنك قیمت تقریبیه‌لری دخی مطلوب اولان درجهٔ صحته نظراً تقدیر اولنه‌بیلور .

۲ . — **زاویه‌لرك مساحه‌سی.** هندسه‌ده کورلدیکی اوزره بر زاویهٔ مرکزیه ضلعلری اراسنده محصور قوسه مساوی اولدیغندن اشبو اساس زاویه‌نك مساحه‌سنده مستقل بر واحد قیاسیدر. قوسك واحد قیاسیچون اکثریا ربع دائره قوسی یاخود محیطك ۳۶۰ اجزاسندن بر درجه‌لك قوس اخذ اولنور واوحالده زوایا بر قائمه‌نك کسریله یاخود درجه دقیقه وثانیه ایله تقدیر اولنور وقولایجه بر مساحه‌دن دیکرینه انتقال اولنور . نظری سؤاللرده قوسك واحد قیاسیچون طولی نصف قطره مساوی اولان قوسی اخذ ایتمك محسناتلیدر.

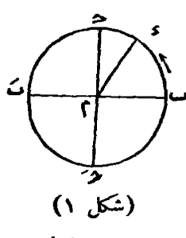
قوس مذکورك درجه ایله افاده‌سی قولایدر. چونکه محیط دائره طولی $2 \pi r$ اولدیغندن اکر طول قوس $= 2 \pi r$ اولور ایسه قوس مذکور $360^\circ$ دن عبارت اولوب اکر طول قوس $= r$ اولور ایسه

$$360^\circ = 2 \pi r ، r = \frac{360}{2 \pi} = 8 , 44' 17'' 57''' \text{ اولور}$$

بو جهتله مثلثات فننده نصف قطر دائما واحد قیاسی ایچون

اخـذ اولنور ونصف قطری واحده مسـاوی اولان دائره‌یه دائرهٔ مثلثـات دینور او لحال محیط ٢ π ایله وربع محیط $\frac{\pi}{2}$ ایله ارائه‌اولنوب ٩٠ یاخود $\frac{\pi}{2}$ و ٣٠ یاخود $\frac{\pi}{6}$ وهکذا بلافرق یازیلور .

**٣** . ــ مثلثات دعوالرینه لازمکلان عمومیتی اعطا ایچون ابعاد مختلفه‌ده بولنان مثبت ومنفی قوس وزاویه‌لری تصور ایتمك ایجاب ایدر خصوص مذکوره ایچون (شکل ١) مثلثات دائره‌سنده کیف ما اتفق قوسلرك بدایتی یعنی مبدأ تسمیه قلنـان ( ب ) نقطه‌سی اخذ اولنوب (ب بَ) و (ح حَ) قطر قائملری رسم و ( ب ) نقطه‌سـندن حرکت ایدر بر (ى) نقطه‌سـنك محـیط اوزرنده




(شکل ١)

(ب ح بَ ) جهتـه طوغری حرکتی فرض وقیاس اولندقده رسم ایتـدیکی قوس دائمی صورتده تحول ایدر نقطهٔ متحرکه ( ب ) محلنـده بولنـدیغی وقـتده قوس صفر اولوب فقط اولامرده (ى) نقطهٔ متحرکه‌سی برنجی (ب ح) ربع محیطنی قطع ایتدیکی حالده قوس مذکور ( ٠ : $\frac{\pi}{2}$ ) مقداری بعـده ایکنجی (ح بَ ) ربع محیطنی دخی قطع ایتـدیکی کبی قوسده ( $\frac{\pi}{2}$ : π )یه قدر وصـکره اوچنجی ربع محیطی قطع ایدنجه ( π : $\frac{3\pi}{2}$ ) ودردنجی ربع محیطی قطع ایلیه‌رك حرکت ایتدیکی نقطـه‌یه عودت ایلدیکی کبی ( $\frac{3\pi}{2}$ : ٢ π )یه قدر تزاید ایدر

وبو وجهله نقطهٔ متحركه ايكنجى واوچنجى والى آخره دورلرى اجرا ايلدكجه قطع ايلديكى مسافه نامتناهى صورتده تزايد ايلر.

اكر (ب ح بَ) جهتده حركتى قياس اولنان (ى) نقطهٔ متحركه‌سنك (ب حَ بَ) عكسى جهتده حركتى نظر مطالعه‌يه آلنه‌جق اولور ايسه بو تحولده اشارت تبدل ايدوب قطع اولنان قوس منفى اعتبار اولنه‌رق صورت نامتناهيده تناقص ايدر زيرا منفى بر مقدار قيمت مطلقه‌سنك تزايدى مقدارنجه تناقص ايدر.

بو صورتده قوس ممكن اولديغى درجه بر تحول ايله بتون قيمتلرى (− ∞) دن (+ ∞) يه دكين كافهٔ ابعادى اخذ وقبول ايدر.

وكذلك (ى) نقطهٔ متحركه‌سى مركزه (م ى) نصف قطرى ايله وصل ونقطهٔ مذكوره ايله نصف قطر برلكده حركتده تصور اولندقده نصف قطرمز بور (ب م ى) زاويهٔ متحوله‌سنى رسم وزاويهٔ مذكوره دخى ب ى قوسيله مساحه اولنديغندن قوس مذكورك عوارض مختلفه‌سنك ب م ى زاويه‌سنه دخى شمولى اوله‌جغى دركاردر.

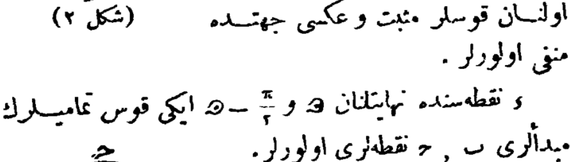
٤ . — هر قنغى (شكل ١) ب ى قوسى (ﻫ) حرفيله اشعار اولنسه نقطهٔ متحركه بر وايكى واوج .... كره محيطى كرك مثبت وكرك منفى جهتده قطع ايتدكدن صكره (ى) نقطه‌سنه واصل اولسه برنجى خصوصده قطع اولنان قوسلر (٢ π + ﻫ) و (٤ π + ﻫ) و (٦ π + ﻫ) الى آخره وايكنجى

خصوصده (– ۲ π + ۀ) و (– ٤ π + ۀ) و (– ٦ π + ۀ) الی آخره صورتله کوستریله‌بیلوب عمومیتله نهایتلری (د) نقطه‌سنده منتهی اولان قوس (۲ ق π + ۀ) دستوریله اشعار اولنورکه (ق) کرك مثبت وکرك منفی محیطك برعدد تامنی کوسترر.

۵ . – ایکی قوسك مجموعلری ($\frac{\pi}{2}$) یاخود ۹۰ یه مساوی اولور ایسه اولقوسلر بری برینك تمامی اولورلر. مثلا هر قنغی ب د قوسی ۀ ایله کوستریلور ایسه تمامی اولان د ج قوسی $\frac{\pi}{2}$ – ۀ افاده‌سیله ارائه اولنور.

(شکل ۲) مثلثات دائره‌سی اوزرنده ج نقطه‌سی تمامی قوسلر ایچون مبدأ اعتبار اولنور.

ج ب صاغ جهته طوغری اخذ اولنان قوسلر مثبت وعکسی جهتده منفی اولورلر.



(شکل ۲)

د نقطه‌سنده نهایتلنان ۀ و $\frac{\pi}{2}$ – ۀ ایکی قوس تماملرك مبدألری ب , ج نقطه‌لری اولورلر.

٦ . – اکر ایکی قوس متممك مبدائی (ب) نقطه‌سی اوله‌جق اولور ایسه (شکل۳) نهایتلری (ب بَ) قطرینه موازی رسم اولنان خط اوزرنده بولنور.

(شکل ۳)

بناءً علیه ب د ، دَ قوسلرندن ب دَ قوسنك متممی اولان

ﺏَ ﺀَ قوسی ب ﺀ قوسنه مساوی اولدیغندن (ﻫ) حرفیله اشعار اولندقد متممی ($\pi$ — ﻫ) و تمامی ($\frac{\pi}{2}$ — ﻫ) اولور.

## { دوری تابعلر }

۷ــ . زاویه‌لری حسابه ادخال ایتمك کوج اولدیغندن مذکور زاویه‌لری تابع اولدقلری مقادیر ایله الحاق تصور اولنمش و بوکا دوری تابعلر نامی ویرلمشدر. بو جهتله مثلثات عمومیتله علوم ریاضیه‌نك بر شعبه‌سی اولوب موقوف علیهی دوری تابعلر مطالعاتی حاویدر. جیب «حس». مماس «مم». قاطع «قع». تمام جیب «تحس». تمام مماس «تمم». تمام قاطع «تقع». نامیله مواد سته‌دن عبارتدر [*].

---

[*] جیب وسهم ابن جابر طرفندن تأسیس ایدلمشدر.

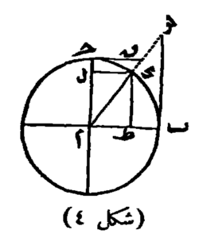
مشارالیه میلادك اونبرنجی عصرنده قوم نجیب عرب مؤلفلرندن اولوب الجزیره‌ده باتان قریه‌لیدر بو جهتله اوروپالیلرجه آلباتانیوس شهرتیله مشتهردر هجرتك ۳۰۳ تاریخنده وفات ایلمشدر.

مماس وتمام مماس محمد بن یحیی طرفندن اختراع وادخال اولنمشدر.

مشارالیه سوریه‌ده زادکاندن اولوب اونجی عصر میلادك هیئت مؤلفلرندندر وابو الوفا شهرتیله مشتهردر فنه دائر اثاری اوروپالیلر نزدنده غایت معتبردر.

قاطعك استعمالی رتیکوس نامیله شهرت بولمش و (فلدکیرك) لی یوهوشم (زوژ) طرفندن وضع اولنمشدر. (۱۵٦٦) تاریخ میلادیسنده مجارستانده وفات ایتمشدر.

(شکل ٤) بر قوسك جيبى قوس مذكورك بر نهايتندن



(شکل ٤)

مرور ايدن قطر اوزرينه ديكر نهايتندن تنزل اولنان عمودك نصف قطره نسبتنه اطلاق اولنوب بوتقديرجه $\frac{ى ط}{م ب}$ نسبتى ب ى قوسنك ياخود ب م ى زاويه‌سنك (جيبى) اولور .

وينه ب نقطه‌سندن ب ى قوسنه ب ﻫ خط مماسى رسم ايله م ى خطى اشبو عموده تلاقى ايدنجيه دكين اخراج اولندقده $\frac{ب ﻫ}{م ب}$ نسبتنه ب ى قوسنك ياخود ب م ى زاويه‌سنك (مماسى) و $\frac{م ﻫ}{م ب}$ نسبتنه‌ده (قاطعى) تعبير اولنور.

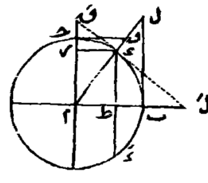
بر قوسك تمام جيب. و تماس مماس وتمام قاطعى قوس مذكور تمامنك جيب و مماس وقاطعنه مساوى اولوب اشبو تابعه (تمامى تابع) اطلاق اولنور .

خطوط مثلثاتيه ـ (شكل ٥) نصف قطر واحد فرض اولندقده بوحالده بر قوسك جيبى قوس مذكورك نهايتندن مرورايدن نصف قطر اوزرينه ديكر نهايتندن تنزيل اولنان ى ط عمودندن عبارتدر مماسى دخى قوس مذكور نهايتلرينك برندن رسم ايديلان خط مماسك نقطهٔ تماسيله خط مماس مرسومك قوسك ديكر نهايتندن مرور ايدن نصف قطرله تلاقى ايتديكى ل نقطه‌سى بيننده بولنان ب ل خط مماس هندسيسندن عبارتدر.

قاطعی دخی قوسك مركزيله مماسنك ل نهايت نقطه‌سی بيننه موصول م ل بعدينه اطلاق اولنور.

د ح قوسی ب د قوسنك تمامی اولديغندن اشبو قوسك د ر جيبی ب د قوسنك تمام جيبی اولديغی كبی مماس وقاطعی اولان ح و، م و خطلری ب د قوسنك تمام مماس و تمام قاطعی اولورلر.

تنبيه ١ ــ (شكل ٥) د ط، ح م مستقيملرينك موازاتی حسبيله د ر = م ط اولمغله بو حالده جيبك موقع عموديله مركز بيننده بولنان نصف‌قطرك م ط قسمنه تمام جيب تعبيری دخی ممكندر.

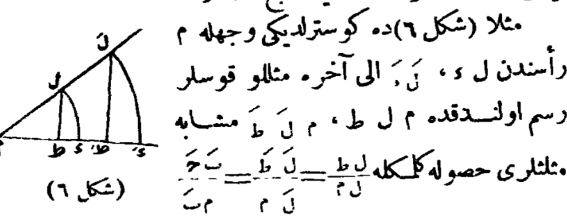


(شكل ٥)

تنبيه ٢ ــ د نقطه‌سنده بر خط مماس رسم اولنور ايسه م ل = م لَ اوله‌رق نصف قطر محدودك م لَ قسمنه ب د قوسنك قاطعی دينور.

٨ ــ. زاويهٔ معلومه‌يه نظراً تعيين اولنان انساب مثلثاتيه‌نك قيمتی نصف قطرك مقدارينه تابع دكلدر.

مثلا (شكل ٦) ده كوسترلديكی وجهله م رأسندن ل د، لَ دَ الی آخره مثللو قوسلر رسم اولندقده م ل ط، م لَ طَ متشابه مثلثلری حصوله كلكله $\frac{ل ط}{ل م} = \frac{لَ طَ}{لَ م} = \frac{بَ حَ}{م بَ}$ = جيب ل م ط اولوب بووجهله ل م ط زاويه‌سنك سائر



(شكل ٦)

مثلثات تابعلری نصف قدر هرنه قدر تحول ایدر ایسه بیله
ثابت قالهجغی کوریلور .

۹ — . (شکل ٥) ب د قوسنك د ط جیبی ء ب ءَ قوسنك
وترینك نصفیدر.

اشبو خاصه واسطهسیله ٤٥، ٣٠، ٦٠، ١٨ درجهلك
قوسلرك جیبلری طوغریدن طوغری‌یه حساب اولنه بیلور.
نصف قطری واحد اولان دائرهده مرسوم مربع ومسدس
منتظم ومثلث متساوی الاضلاع واون ایکی ضلعلی شکل منتظمك
ضلعلرینك نصفنی آلمق کفایت ایدر

بو وجهله

$$\text{حب}\,45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ،\ \text{حب}\,30^\circ=\frac{1}{2}\ ،\ \text{حب}\,60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

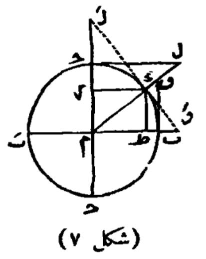
$$\text{وحب}\,18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$$

فرض مذکوره نظراً (ماده ـ ۷) ذکری سبقت ایدن
نسبتلر یالکز بر حده تحول ایدر یاخود کسورات مزبورهنك
مخرجلری واحده ارجاع اولنمش اولورکه (شکل ٤) د ط ؛
ب ه؛ م ه طوللری ب د قوسنك مثلثات خطلرینی کوستررلر
ومثلثات انسابی بوصورته تطبیقاً نظر مطالعه‌یه آلنور .

۱۰ . ـ **اشارت خطوط مثلثاتیه.** خطوط مثلثاتیهده قارت
طرفندن تأسیس اولنمش علاماتك قاعدهٔ متوافقانهسنه تابعدرلر.

مثلثات دائره‌سنك برنجی ربع دائره‌سنه نسبتله عین جهتدن داخلندن رسم اولنان خطوط مثلثاتیه مثبت وربع مذکورك جهت معکوسه‌سندن مرسوم خطوط مثلثاتیه دخی منفی اعتبار اولنور .

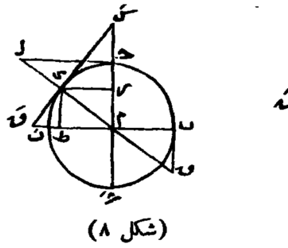
بوتقدیرجه جیبلر وتمام قاطعلر (شکل ٧) (ب بَ) قطری فوقنده بولندقجه مثبت وتحتنده بولندقجه منفی اوله‌جغی کبی تمام جیبلر ایله قاطعلر (ح حَ) قطرینك صاغ جهتنده مثبت وصول جهتنده منفی اولدیغی کبی قاطع وتمام قاطعلر قوسك نهایتی مرکز ایله خط مماس ارەسنده بولندقجه

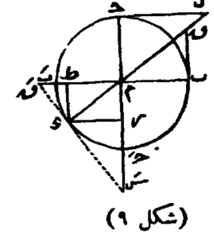


(شکل ٧)

مثبت وعکس تقدیرده منفی اولور . قاطعلر وتمام قاطعلر مثبت اولدقلری حالده قوسك نهایتندن مرور ایدرلر .

(شکل ٧) ب ى قوسی برنجی ربعده نهایت بولدیغندن


(شکل ٨)


(شکل ٩)

خطوط مثلثاتیه‌سی مثبت اولوب (شکل ٨) ایکنجی ربعده نهایت

بولدیغی حالده ی ط جیبله م وَ تمام قاطعی مثبت و (شکل ۹) اوچنجی ربعده نهایت بولدیغی تقدیرده ب و مماسیله ح ل تمام مماسی مثبت والحاصل شکل ۱۰ دردنجی ربعده نهایت بولدیغی صورتده ی ر تمام جیبله م وَ = م و قاطعی مثبت اولورلر .

خطوط مثلثاتیه‌نك هر بری ایکی ربعده مثبت ودیکر ایکی ربعده منفی اولورلر.

(شکل ۱۰)

قاطع ایله تمام قاطع م و ، م ل وضعیتنده ملاحظه اولنورلرایسه مذکور خطلر قوسك نهایتندن مرور ایتدکجه مثبت وعکسی تقدیرده منفی اولورلر .

تمام قاطع جیب ایله وقاطع تمام جیب ایله وتمام مماس مماس ایله دائما عینی اشارتده بولنورلر.

## {باب ثانی}

## مثلثات خطلرینك تحوللری

### ۱۱ .— جیب وتمام جیبك تحوللری

(۱) — جیب . (شکل ۱۱) ی نقطهٔ متحرکه‌سی مبدأ نقطه‌سیله منطبق بولندیغی حالده قوس صفر اولمغله جیبی دخی صفر اولور . اکر (ی) نقطهٔ متحرکه‌سی محیط اوزرنده مبدأ

نقطه‌سندن ( ح ) نقطه‌سنه دکین تزاید ایدر ایسه قوس دخی صفردن $\frac{\pi}{2}$ یه قدر تزاید و جیبک کافهٔ قیمتلری صفر ایله واحد بیننده بولنوب (ء) نقطه‌سی بو صورتله حرکته دوام ایله ( بَ ) نقطه‌سنه دکین تزاید ایدر ایسه قوس دخی ( $\frac{\pi}{2}$ ) دن ( $\pi$ ) یه دکین تزاید



(شکل ١١)

ایدوب جیب ایسه واحددن صفره دکین تناقص ایدر و نقطهٔ متحرکهٔ مذکوره (بَ) نقطه‌سنی کچه‌رك ( حَ ) نقطه‌سنه دکین کیدر ایسه جیب منفی اولوب قوس ( $\pi$ )دن ( $\frac{3\pi}{2}$ ) یه قدر تزاید وجیب صفردن ناقص واحده دکین تناقص والحاصل قوس مذکور ( $\frac{3\pi}{2}$ ) دن ( $2\pi$ ) یه دکین تزاید ایدر ایسه جیب منفی اولدیغی حالده ناقص واحددن صفره قدر تزاید ایدر . اکر قوس مذکور محیط اوزرنده نامتناهی صورتده تزاید ایدرایسه (ء) نقطهٔ متحرکه‌سی ذکر اولنان عین نقاطه واصل اولوب جیب دخی متعاقباً اولکی قیمتلرینی اخذ ایدر .

ایمدی (ء) نقطهٔ متحرکه‌سی (ب حَ بَ) منفی جهتده محیطی طولاشه‌جق اولورایسه فقط عکس نظامده ینه قیمت مذکوره‌یی حاصل ایدر بالاجمال صفردن صرف نظرله جیبك بتون قیمتلری ( — ١ ) ایله ( + ١ ) بیننده بولنوب قوسك نهایتی (ح) نقطه‌سنه کلدکده جیب الك اعظم وقوس مذکور نهایتی (حَ) نقطه‌سنه کلدکده الك اصغر اوله‌جق کبي قوسلرك نهایتی

برنجی و ایکنجی ربع محیطلر اوزرنده بولنور ایسه جیبلری مثبت و دیکر ایکی ربعده منفی اولور.

(ب ی) قوس (ﻫ) حرفیله کوسترلدکده حس ﻫ = ط ی اولوب نهایتی (ل) نقطه‌سنه کلان بالجمله قوسلرك جیبی (ط ی) اولور.

(۲) تمام جیب. (ی) نقطهٔ متحرکه‌سی مبدأ نقطه‌سنده بولندیغی حالده قوس صفر اولوب و تمام جیبی واحده مساوی اولور اکر نقطهٔ مذکوره (ب ح) قوسنی رسم ایدر یعنی (۰)دن ($\frac{\pi}{۲}$)یه قدر تزاید ایدر ایسه (ﻫ) نقطه‌سی مرکزه طوغری تقرب ایده‌جکندن تمام جیب (۱)دن (۰)ه قدر تناقص ایدوب قوس مذکور ($\frac{\pi}{۲}$)دن ($\pi$)یه‌قدر تناقص وقوس ($\pi$) دن ($\frac{۳\pi}{۲}$)یه قدر تزاید ایتدیکی حالده تمام جیب (— ۱)دن (۰)ه دکین تزاید ایدر الحاصل قوس ($\frac{۳\pi}{۲}$)دن (۲ $\pi$) یه قدر تزاید ایتدیکی کبی تمام جیب دخی صفر (۰)دن واحد (۱)ه دکین تزاید ایدر.

قوس مذکور محیط اوزرنده بویله‌جه صورت نامتناهیده تزاید ایتدکجه تمام جیب دخی عین نظامده اولکی قیمتلرینی احذ ایدر.

تمام جیب صفردن صرف نظرله (— ۱) ایله (+ ۱) بیننده تحول ایدر قوس برنجی ودردنجی ربع محیطلره منتهی اولور ایسه تمام جیب مثبت ودیکر ایکی ربع محیطلره منتهی

اولور ایسه منفی اولور. بو وجهله جیب و تمام جیب مختلف
نظامله اشارت و اعظمیت جهتلریله عین تحولات داخلنده
بولنورلر بو کیفیت بر قوسڭ تمام جیبی تمامی اولان قوسڭ
جیبنه مساوی اولمسیله اثبات اولنه‌بیلور.

## ۱۲. — مماس و تمام مماسڭ تحوللری

(۱) مماس. (شکل۱۲) قوس صفر اولدیغی صورتده مماس
دخی صفر اولوب قوس مذکور (۰)دن
($\frac{\pi}{2}$)یه قدر تزاید ایلدیکی کبی مماس دخی
نامتناهی اوله‌رق تزاید ایدر بو جهتله (د)
نقطهٔ متحرکه‌سی (ح) نقطه‌سنه واصل
اولدقده خط قاطع ایله خط مماس موازی
بولنه‌جقلرندن مماس نامتناهی اولوب بو

(شکل ۱۲)

وجهله قوس (۰)دن ($\frac{\pi}{2}$)یه قدر تزایدنده مماس دخی (۰)دن
(+ ∞ )یه قدر تزاید ایدر واکر (د) نقطهٔ متحرکه‌سی (ح)
نقطه‌سنی تجاوز ایدر ایسه مماس اڭ اعظم قیمت مطلقه‌سنی حفظ
ایدرك درحال منفی اولوب یعنی قوس ($\frac{\pi}{2}$)یی تجاوز ایتدیکی
کبی خط مماس درحال (+ ∞ )دن (— ∞ )یه تبدل ایدر
قوس مذکور ($\frac{\pi}{2}$)دن (π)یه قدر تزاید ایدر ایسه مماس دخی
( — ∞ ) دن (۰) ه قدر تزاید ایدر بوتقدیرجه قوس (۰)دن
(π) یه قدر آرتدیغی کبی خط مماس دخی ( — ∞ ) دن ( +
∞ ) یه دکین بالجمله قیمتلرینی اخذ ایدر.

واکر قوس تزاید ایتمکده دوام یعنی ($2\pi$) یه قـدر دائره‌یی سیر ایدر ایســه خط مماس دخی اولجه آلمش اولدیغی نظام اوزره بالجمله قیمتلرینی اخذ ایدرك برنجی واوچنجی ربع دائره‌لرده نهایتلنان قوسلرککی مثبت ودیکر ایکی ربعــده منفی اولور .

نقطــهٔ متحرکه کرك مثبت وکرك منفی جهتــدن نصف محیطلری بر وایکی واوچ الی آخره کره قطع ایتــدکدنصکره (ی) یاخود (ی١) نقطه‌لرینی کچدیکی حالده رسم اولنان قوسلرك خط مماسلری دائما (ب و) خطنه مساوی اولور.

(۲) تمام مماس. برقوسك تمام مماسی قوس مذکور تمامنك مماسی اولدیغندن اعظمی تحولات بونده دخی ظهوره کلور تمام مماس برنجی واوچنجی ربع دائره‌لرده مثبت ودیکر ایکیســنده منفی اولور .

(شکل ۱۳) ده کوسترلدیکی اوزره قوس صفر اولدیغی حالده تمام مماس نامتنــاهی اولوب قوس مذکور (۰) دن ($\frac{\pi}{2}$) یه قدر تزاید ایدر ایسه تمام مماس دخی ($+\infty$) دن (۰) ه قدر تنــاقص و ($\frac{\pi}{2}$) دن ($\pi$) یه قدر آرتدیغی صورتده تمام مماس دخی (۰) دن ($-\infty$) یه دکین تناقص ایدر اکر نقطهٔ متحرکه (بَ) نقطه‌سنی

(شکل ۱۳)

تجاوز ایدر ایسه تمام مماس مثبت اوله‌رق عین نظام اوزره ذکر اولنان بالجمله قیمتلرینی اخذ ایدر.

## ۱۳ . — قاطع وتمام قاطعك تحوللری

(۱) قاطع . قوس صفر ایکن خط قاطع نصف قطرله منطبق بولندیغندن قاطع (۰) = ۱ اولور (شکل ۱٤)ده کورلدیکی اوزره قوس (۰) دن ($\frac{\pi}{2}$) یه قدر تزاید ایدر ایسه یَ نقطه‌سی تدریجاً و م ب دن تباعد ایدر قاطع دخی (۱) دن ($+\infty$) یه‌دکین تزاید ایدر وقوس (شکل ۸) ($\frac{\pi}{2}$) دن ($\pi$) یه دکین تزاید ایدر ایسه قاطع منفی اوله‌رق ($-\infty$) دن ($-1$)ه دکین تزاید ایدر ونقطهٔ متحرکه (بَ) نقطه‌سنی تجاوز ایتدیکی صورتده ومثلا (شکل ۹) قوس ($\pi$) دن ($\frac{3\pi}{2}$) یه دکین تزایدنده قاطع ($-1$) دن ($-\infty$) یه دکین تناقص ایدر قوسك تزایدیله قاطع درحال $-\infty$ دن $+\infty$ تحول ایدر الحاصل (شکل ۱۰) قوس ($\frac{3\pi}{2}$) دن ($2\pi$) یه قدر تزاید ایدر ایسه قاطع مثبت اوله‌رق ($+\infty$) دن ($+1$)ه دکین تناقص ایدرکه بوتقدیرجه قاطع ($-1$) ایله ($+1$) اراسنده‌کی قیمتلری اخذ ایده‌مز.

(شکل ۱٤)

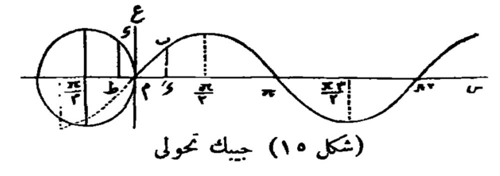
(۲). تمام قاطع. خط مذکورك تحولی قاطعده اولدیغی مثللو عین وجهله جاریدر (ماده ۱۰ اشکال) کوریله‌جکی اوزره

تمام قاطع برنجی وایکنجی ربع محیطلرده مثبت ودیکر ایکیسنده منفی اولور .

قوس صفر اولدیغی حالده تمام قاطع نامتناهی اولوب اکر قوس (۰) دن ($\frac{\pi}{2}$) یه قدر تزاید ایدر ایسه تمام قاطع (+ ∞) دن + (۱) قدر تناقص وقوس ($\frac{\pi}{2}$) دن (π) یه قدر تزاید ایدرایسه تمام قاطع عکس نظام اوزره بتون قیمتلرینی اخذ ایدەرك (+ ۱) دن (+ ∞) یه دکین تزاید ایدر نقطهٔ متحرکه (بَ) نقطەسنی تجاوز ایتدیکی صورتده تمام قاطع درحال منفی اولەرق قوسك نهایتیله مرور ایتمز وینه (π) دن ($\frac{\pi ۳}{2}$) یه قدر تزایدنده تمام قاطع (— ∞) دن (— ۱) ە دکین تزاید ایدوب ($\frac{\pi ۳}{2}$) دن (۲ π) یه دکین تزایدنده ایسه تمام قاطع عکس نظام اوزره اولجه آلمش اولدیغی قیمتلری آلەرق (— ۱) دن (— ∞) یه دکین تناقص ایدر قاطعده اولدیغی مثللو تمام قاطع دخی — ۱ ایله + ۱ بیننده هیچ برقیمت اخذ ایدەمز وقیمت اعظمیسی — ۱ واصغریسی + ۱ اولور.

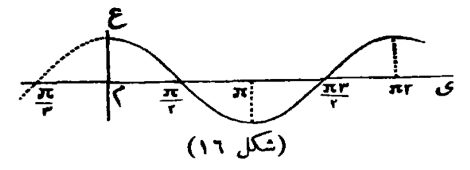
۱٤ . — مختلف فصلەلرده اخذ اولنەرق ترسیم اولنان منحنیات مثلثات تابعلرینك تحولاتنی ارائه ایدەجکندن (شکل (۱۵ و ۱٦ و ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ و ۲۰) دەکی منحنیات مرسومه نظر مطالعەیه النەبیلوب مذکور منحنیلر (ه) قوسنك متعاقبا اولان مختلف طوللرینك فصلەلرنده وترتیبلرده ایسه توابع متصورەنك مربوط اولدقلری قیمتلر تعیین ومؤخراً دخی نقاط

متحصله ربط ایدیله‌رك حصوله كتورلمشـدرلر . ( شكل ١٥ ) (٠) ایله (٢ π) اره‌سنده برقوسك جیبنك تحولاتی ارائه ایدر.



(شكل ١٥) جیبك تحولی

مثلا (ب) نقطه‌سنك (م ءَ) فصله‌سی (م ء) قوسنك محیطنه مساوی اولوب نقطهٔ مذكوره‌نك (ب ءَ) ترتیبی (م ء) قوسنك جیبی اولمغله م ءَ = م ط اولور تمام جیبـك تحوللری دخی (شكل ١٦) ایله كوستردیكی اوزره عینی وجهله بولنور. وقس



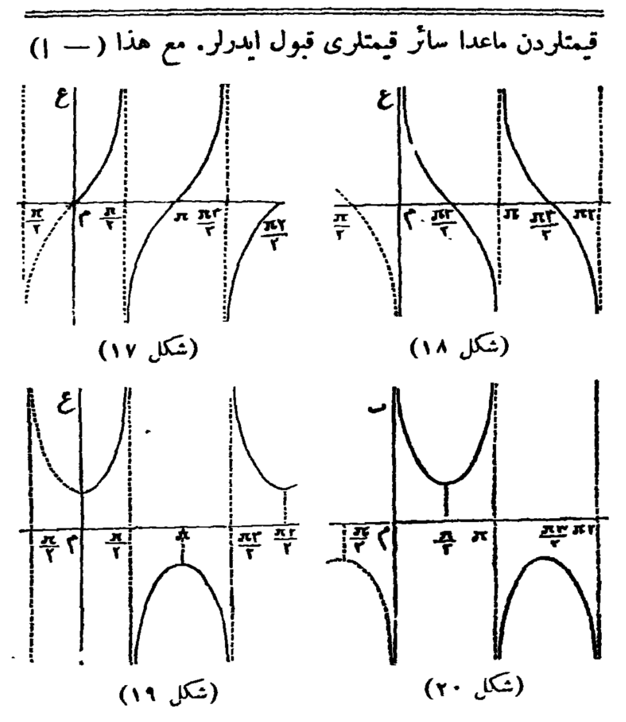
(شكل ١٦)

علیه البواقی (مماس وتمام مماس وقاطع وتمام قاطعـك تحوللری ایسه ١٧ ١٨ ١٩ و ٢٠ شكللریله ارائه اولنمشدرلر)

**١٥** . — اجمال. مثلثات تابعلری اوزرینه اجرا ایدیله‌كلان مطالعات بروجه آتی تنبیهات مهمه‌یی انتاج ایدر .

(١) جیب وتمام جیب ( — ١ ) دن ( + ١ ) ه قدر ومماس ایله تمام مماس ( — ∞ ) دن ( + ∞ ) یه قـدر تحول ایدرلر فقط قاطع ایله تمام قاطع ( — ١ ) ایله ( + ١ ) بیننده بولنان

قیمتلردن ماعدا سائر قیمتلری قبول ایدرلر. مع هذا ( — ١ )



(شکل ١٧)

(شکل ١٨)

(شکل ١٩)

(شکل ٢٠)

ایله ( + ١ ) بیننده‌کی کافهٔ مقادیر جیب وتمام جیب کبی نظر اولنه‌بیلوب بالجمله مثبت ومنفی مقدارلر مماس وتمام مماس الی آخره مثللو نظر اولنه‌بیلور.

(٢) بر نسبتك اشارتی عکس ترتیبنك دخی اشارتك عینی اولەرق تمام قاطع دائما جیبك اشارتی حفظ ایده‌جکی کبی تمام

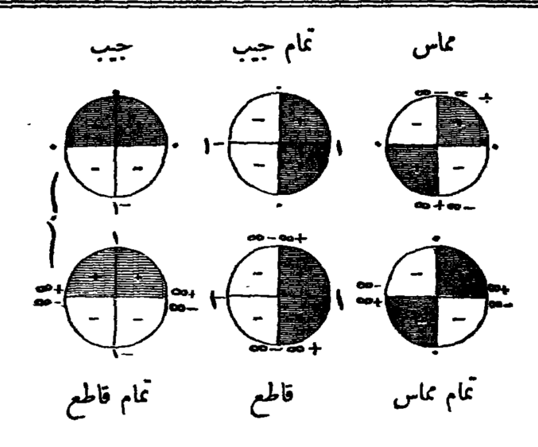
مماس مماسك وقاطع تمام تمام جيبك اشارتی حائز بولنور ایسه‌ده فقط قیمتلر تزاید ومخالف جهتده تناقص ایدرلر ازجمله جیبك تزایدنده تمام قاطع تناقص ایدر. ا آلی‌خره

(٣) بر قوس برنجی ربع محیط داخلنده نهایتلنور ایسه مثلثات خطلرینك کافه‌سی مثبت ایکنجی ربع محیطده نهایتلندیکی صورتده یالکز جیب وتمام قاطع مثبت اولوب اوچنجی ربع محیطده نهایتلندیکی حالده مماس وتمام مماس مثبت ودردنجی ربع محیطده نهایتلندیکی کبی قاطع وتمام جیب مثبت اولمغله بناءً علیه خطوط مثلثاتیه‌دن هر بری ایکی ربع دائره‌ده مثبت ودیکر ایکی ربع دائره‌ده منفی بولنور.

مطالعات مذکوره بروجه آتی جدول وشکلده اجمال اولنمشدر.

{ مثلثات خطلرینك تحوللرینی بیلدیرر جدولدر }

| قوس ه | ٠ | | $\frac{\pi}{٢}$ | | $\pi$ | | $\frac{٣\pi}{٢}$ | | ٢ $\pi$ | { |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| جب | ٠ | تزایدی | ١ | تناقصی | ٠ | تناقصی | ١ - | تزایدی | ٠ | ٢ $\pi$ |
| تجب | ١ | تناقصی | ٠ | تناقصی | ١ - | تزایدی | ٠ | تزایدی | ١ | ٢ $\pi$ |
| مماس | ٠ | تزایدی | $\pm\infty$ | تزایدی | ٠ | تزایدی | $\pm\infty$ | تزایدی | ٠ | $\pi$ |
| تمام مماس | $\infty$ | تناقصی | ٠ | تناقصی | $\mp\infty$ | تناقصی | ٠ | تناقصی | $\pm\infty$ | $\pi$ |
| قاطع | ١ | تزایدی | $+\infty$ | تزایدی | ١ - | تناقصی | $+\infty$ | تناقصی | ١ | ٢ $\pi$ |
| تمام قاطع | $\infty$ | تناقصی | ١ | تزایدی | $\pm\infty$ | تزایدی | ١ - | تناقصی | $\mp\infty$ | ٢ $\pi$ |




## باب ثالث

### { خط معلومه توافق ايدن قوسلر }

**١٦** . — اعطا اولنان بر قوسك هر خصوصده يالكز بر مثلثات خطى اولوب فقط بالعكس معلوم بر مثلثات خطنك نامتناهى قوسلرى واردر شمدى مثلثات خطلرينك هر بريله متناسب قوسلرى اعطا ايدن دستورلرى تعيين ايتمك ايجاب ايدر.

هر قنغى بر (ه) قوسنك اولا جيب وتمام قاطعى معلوم فرض وقياس اولندقده

(١) مثلا (شكل ٢١) بر مثبت جيب معلوم فرضيله اعطا
اولنان جيبه مساوى (ح حَ) قطرى اوزرنده
(م ط) بعدى اخذ و (ط) نقطه‌سندن
(ب بَ) قطرينه موازى (ى ىَ) خطى رسم
اولندقده ظاهردركه جيبلرى بعد معلومه
مساوى اولان قوسلر (ى) و (ىَ) نقطه‌لرنده
منتهى اولورلر امدى (ب ى) قوس معلومى

(شكل ٢١)

(ﻫ) ايله اشعار اولنورسه (ى) نقطه‌سنده نهايت بولان بالجمله
قوسلر (ماده ٤) (٢ و π + ﻫ) دستوريله كوستريلور.
(ب ىَ) قوسى ايسه (π — ﻫ) مقدارينه مساوى اولمغله
(ىَ) نقطه‌سنده انتها بولان بالجمله قوسلر {٢ و π + (π —
ﻫ)} وياخود [(٢ و + ١) π — ﻫ] دستوريله تعيين قلنور.
امدى جيبلرى (ﻫ) قوسنك جيبنه مساوى اولان بالجمله
قوسلر ٢ و π + ﻫ و (٢ و + ١) π — ﻫ دستورلريله
تعيين اولنور.

(٢) مثلا بر تمام قاطع مثبت اوله‌رق معلوم اولسه (م)
مركزندن اعطا اولنان طوله مساوى نصف قطر ايله (ل لَ)
خط مماسى ل ، لَ نقطه‌لرنده قطع ايديجى بردائره قوسى رسم
اولنوب (م ل) و (م لَ) خطلرى وصل اولندقده (ب ى)
و (ب ىَ) قوسلرى مطلوب اولان الك كوچك قوسلرى اشعار
ايدر مع هذا تمام قاطعلرى (ﻫ) قوسنك تمام قاطعنه مساوى

اولان بالجمله قوسلر بوندن اقدم کوستریلان دستورلر واسطه‌سیله تعیین اولنوب ر نقطه‌سندن رسم اولنان مماسلر واسطه‌سیله ی، یَ نقطه‌لری کذا تعین ایدر.

بو وجهله جیب ویا تمام قاطعلری مساوی اولان قوسلر شول قوسلردرکه آنلرك فضلی نصف محیطك چیفت مضاعفنه ویاخود انلرك مجموعی نصف محیطلك تك مضاعفنه مساوی اولور.

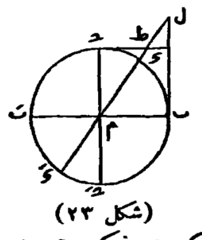
**۱۷.** — شکل ۲۲ بر تمام جیب ویاخود قاطع معلوم اولدیغنه نظراً برنجی حالده تمام جیب مثبت اولدیغنه کوره طول معلومه مساوی م ط بعدی اخذ و ی، یَ عمودی رسم اولندقده ی، یَ نقطه‌لرنده نهایت بولان قوسلر معلوم اولان تمام جیبه توافق

(شکل ۲۲)

ایدرلر. ی نقطه‌سنه منتهی مثبت ومنفی قوسلر (ماده ٤)ده بیان اولنان ۲ ق π + ة دستورنده موجوددر و ب یَ قوسی منفی اولدیغندن — ة اولمغله یَ نقطه‌سنه منتهی قوسلر ۲ ق π — ة دستورنده بولنور کذا یَ نقطه‌سنه منتهی ایلك مثبت قوس ۲ π — ة دستوریله افاده اولنه‌بیلور بو حالده نقطهٔ مذکوره‌ده منتهی بالجمله قوسلر ۲ ق π — ة دستوریله ارائه اولنور. بوجهتله تمام جیبلری برتمام جیب معلومه مساوی اولان قوسلر ۲ ق π ± ة دستوریله افاده اولنور. قاطع

معلومه مساوی م و نصف قطریله رسم اولنان دائره قوسی خط مماسی ی ، یَ نقطه‌لرنده قطع ایتمکله ویاخول ل نقطه‌سندن مماسلر رسمیله ی ، یَ نقطه‌لرنده نهایت بولان قوسلر معلومه مساوی قاطعه توافق ایدرلر وبوجهتله بروجه بالا دستور داخلنده بولنورلر .

**١٨ .** — (شکل ٢٣) مماس ویاخود تمام مماس معلوم فرض اولندقده برنجی احتمالده اکر مماس مثبت ایسه ویاخود عکسی جهتده منفی ایسه طول معلومه مساوی (ب ل) خطی اخذ و (م ل) وصل اولندقده مماسلری طول معلومه مساوی اولان قوسلرك نهایتلری



(شکل ٢٣)

(ء) ویاخود (ءَ) نقطه‌سندن مرور ایده‌جکندن مذکور قوسلر ه و π + ه و ٢ π + ه و ٣ π + ه و — π + ه و — ٢ π + ه و — ٣ π + ه افاده‌لریله ارائه اولنه‌رق علی‌العموم ی π + ه دستوریله تعیین اولنور .

ایکنجی احتمال . تمام مماس اعطا اولنور ایسه مثبت ومنفی اولدیغنه کوره (ح) نقطه‌سنك صاغ ویا صولنده طول معلومه مساوی (ح ط) بعدی اخذ اولندقده (ء) ویاخود (ءَ) نقطه‌سنده منتهی اولان بالجمله اقواسك تمام مماسی (ح ط) خطندن عبارت بولنور بودخی کذلك (ی π + ه) دستوریله تعیین قلنور .

مماسلری ویاخود تمام مماسلری ه قوسنك مماس ویاخود تمام

مماسنه مساوی بالجمله قوسلر ق π + ه دستورنده موجوددر.

تنبیه — جیبلری یاخود تمام قاطعلری مساوی اولان قوسلر بَ بَ قطرینه موازی وترك نهایتلرینه منتهیدر. تمام جیب وقاطعلری مساوی اولان قوسلرده حـَ حـَ قطرینه موازی وترك نهایتلرنده منتهیدرلر. والحاصل مماس ویاخود تمام مماسلری مساوی اولان قوسلر عینی قطرك نهایتلرینه منتهیدرلر.

## باب رابع

### {خطوط مثلثاتیه‌نك بعض قوسلر ایله اولان مناسباتی}

**۱۹** — (۱). مشترك المبدأ قوسلره محیطك هر قنغی مثلی ضم ویاخود طرح اولنسه اقواس متحصله‌نك نهایتلری (ماده ٤) متحد اوله‌جقلرندن خطوط مثلثاتیه‌سی تحول ایتمز زیرا مذکور قوسلرك نهایتلری متحددر.

امدی هر قنغی برقوس (ه) حرفیله اشعار اولنسه بروجه زیر دستورلر ایله افاده اولنورلر.

حس (۲ ق π + ه) = حس ه، محس (۲ ق π + ه) = محس ه

مم (۲ ق π + ه) = مم ه،

تمم (۲ ق π + ه) = تمم ه،

قع (۲ ق π + ه) = قع ه،

تقع (۲ ق π + ه) = تقع ه

**٢٠.** — الحاصل (شكل ٢٤) بر برينك متممى اولان (ب ء) و (ب ءَ) قوسلرى (ماده ٦) (ب بَ) قطرينه موازى و ترك نهايتلرنده منتهى بولنه‌رق ءط، ءَطَ جيبلرى و (م هـ) و (م هَ) تمام قاطعلرى بر برينه مساوى واشارتلرى مماثل اولوب بونلرك غيرى اولان مثلثات خطلرى مساوى مقدارده و مختلف اشارتده بولنورلر.

شكل ٢٤

امدى بر قوس متمميله وضع ايديله‌جك اولور ايسه مثلثات خطلرى قيمتلرينى دكشدرميوب جيب وتمام قاطع مستثنا اولديغى حالده اشارتلرى تبدل ايدر.

بو صورتده

حس (π — ه) = حس ه، محس (π — ه) = — محس ه،
مم (π — ه) = — مم ه ، مم (π — ه) = — مم ه ،
قع (π — ه) = — قع ه، مقع (π — ه) = مقع ه، دستورلرى تشكل ايدر.

**١٢.** — (شكل ٢٥) بر نصف محيط ايله تحول ايتديريلان (ب ء) و (ب ءَ) قوسلرى قطراً قارشولقلى واقع اولوب اشبو قوسلرك اشارات وقيمتلرى تبدل ايتميان (ب ل) مماسيله (ح هـ) تمام مماسى مستثنا اولديغى حالده خطوط مثلثاتيهٔ سائره‌سى قيمتجه دكشمزلرسه‌ده اشارتجه تبدل ايدرلر.

(شكل ٢٥)

امدی بر نصف محیط ایله تحول ایتدیریلان برقوسك مماس وتمام مماسی قیمت ویا اشارتجه دکشمیوب سائرلری عین قیمتده ومختلف اشارتده بولنورلر.

حس (π+ه) = — حس ه، تحس (π+ه) = — تحس ه، مم (π+ه) = مم ه، تمم (π+ه) تمم ه، فع (π+ه) = — فع ه، ىفع (π+ه) = — ىفع ه، مثللو تحریر اولنه‌بیلور.

**۲۲**. — (شکل ۲٦) قیمتلری مساوی واشارتلری مختلف اولان (ب ى) و(ب ىَ) قوسلری (حـ حـَ) قطرینه موازی وتر نهایتلرینه منتهی اولدقلرندن م ط تجیبی ایله م هـ = م هـَ قاطعندن ماعدا خطوط مثلثاتیهٔ سائره‌نك قیمت مطلقه‌لری مساوی واشارتلری مختلف اوله‌رق بولنور.

(شکل ۲٦)

بو صورتده بر قوسك اشارتی تبدل ایدر ایسه مثلثات خطلری قیمت مطلقه واصلیه‌لرینی محافظه ایدوب (تمام جیب ایله قاطعی مستثنا اوله‌رق) اشارتلری تبدل ایدر.

شویله‌که حس (— ه) = — حس ه، تحس (— ه) = تحس ه، مم (— ه) = — مم ه وتمم (— ه) = — تمم ه، فع (— ه) = فع ه، ىفع (— ه) = — ىفع ه

## ۲۳ . — بر قوسك برنجی ربع دائره‌یه ارجاعی

برنجی ربع محیطده خطوط مثلثاتیه اشارتلرندن صرف نظر اخذه قابل اولدقلری کافهٔ قیمتلرینی آلورلر برقوسی برنجی ربع دائره‌یه ارجاع ایتمك قوس مذکورك (۰°) ایله (۹۰°) میاننده بولنان قوسنی تقدیر ایتمك دیمك اولوب ربع مذکور قوس معلومك قیمب مطلقه‌ده مثلثات خطلرینی حاوی بولنور.

مثلا ۱۵۳۷° درجه‌لك بر قوس درت محیط یاخود (۱۴۴۰°) ایله ۹۷° درجه مجموعندن عبارت اولوب امدی قوس مذکورك مثلثات خطلری (۹۷°) درجه‌لك قوسك مثلثات خطلرندن عبارت اولمغله اشبو قوسك متممی (۸۳°) درجه‌لك قوس اولدیغندن بوصورتده (ماده ۱۵)

حس ۱۵۳۷° = حس ۹۷° = حس ۸۳°

محس ۱۵۳۷° = محس ۹۷° = — محس ۸۳°

مم ۱۵۳۷° = مم ۹۷° = — مم ۸۳°

بو وجهله بر قوسك برنجی ربع دائره‌یه ارجاعنده قوس مذکوردن ۳۶۰° درجه‌نك ممکن اولدیغی قدر تنقیصنه سی اولنه‌رق بوندن متباقی قوس قنغی ربعده نهایت بولدیغی معلوم اولوب بو جهتله مثلثات خطلرینك اشارت معینه‌سی تخصیص ایدیله‌بیلور متباقئ مذکوره (۹۰°) درجه‌دن کوچك بولندیغی وقت قوس متعینه طوغریدن طوغری‌یه بیان اولنور (۹۰°) دن بیوك اولدیغی صورتده متممی آلمق ایجاب ایدر واکر متباقئ

مذکوره (١٨٠°) ی متجاوز بولنور ایسه متممی آلنمزدن اقدم
اول امرده قوس مذکوردن (١٨٠°) یی طرح ایتمك اقتضا ایدر.

## { تطبیقات }

(١) $\frac{١٣\pi}{٣٠}$ و $\frac{٣\pi}{١٦}$ قوسلرینی درجه ایله افاده ایتمك.

π محلنه درجه حسندن قیمتی اولان ١٨٠° وضع اولندقده
$\frac{١٨٠\times١٣}{٣٠} = ٧٨°$ و $\frac{١٨٠\times٣}{١٦} = ٣٣°\ ٤٥'$ اولور.

(٢) ٢٤٨° ، $\frac{٧\pi}{٨}$ و — ١٧' ٥٢° لك قوسلرك تماملرینی و متمملرینی تعیین ایتمك.

٩٠° و ١٨٠° ایله اولان تفاوت اخذ اولندقده

تماملری — ١٥٨° ، ٦٧° ٣٠' و ١٥٧° ٤٣'

متمملری — ٦٨° و ٢٢° ٣٠' و ٢٤٧° ٤٣' اولورلر.

(٣) ١٢٠° و ١٣٥° و ١٥٠° و ١٦٢° درجه‌لك قوسلرك جیب وتمام جیبلرینی بولمق. هر قوسك جیبی (ماده ٩) متممنك جیبنه مساوی اولدیغندن حس ١٢٠° = حس ٦٠° = $\frac{١}{٢}\sqrt{٣}$ ،

حس ١٣٥° = حس ٤٥° = $\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$

حس ١٥٠° = حس ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

حس ١٦٢° = حس ١٨° = $\frac{١}{٤}(\sqrt{٥} - ١)$

(٤) ٦٠° و ١٥٠° درجه‌لك قوسلرك تمام جیبنی بولمق.

برقوسك جیبی تمامنك تمام جیبی اولدیغندن و ٣٠° و — ٦٠°

درجه‌لك قوسلرك جيبی يازيله‌جق اولور ايسه $\text{جب } ٦٠° = \frac{١}{٢}$

$\text{جب } ١٥٠° = -\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$ اولور.

(٥) $\text{جب } \alpha = \frac{١}{٢}$ و $\text{جب}^{٢} \alpha = \frac{١}{٢}$ اولمق اوزره

($\alpha$) ايله (٠..°) درجه بيننده اولان قوسلرينی تعيين ايتمك.

اولا تمام جيبی $\frac{١}{٢}$ اولان الككوچك مثبت قوس ٦٠° ياخود $\frac{\pi}{٣}$ اولوب سائر قوسلرده ٢ ى $\pi \pm ٦٠°$ دستوری داخلنده بولنمغله ى ايچون ٠ و ١ قيمتلری وضع اولندقده

٦٠° ، ٣٠٠° ، ٤٢٠° قوسلری بولنور

ثانياً $\text{جب}^{٢} \alpha = \frac{١}{٢}$ معلومندن $\text{جب } \alpha = \pm\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

و بورادن $\alpha = \pm ٤٥°$ اوله‌رق سبق ايدن دستورده ى محلنه (٠) و(١) وضع ايله ٤٥° و ٢٢٥° و ٣١٥° و ٤٩٥° قوسلری بولنور.

(٦) (شكل٢٧) (ب ى) قوسنه ($\frac{\pi}{٢}$) مقداری ضم اولنسه حاصل اولان (ب ىَ) قوسی برنجی قوسك تمامی اولور. امدی (م ى ط) و (م ىَ طَ) وينه م ب ل ، م ح هَ مثلث قائم الزاويه‌لری مساوی اولدقلرندن وكذا م ب لَ ، م ح ه مثلثلريدخی مساوی اولدقلرندن



(شكل ٢٧)

(ب ى) قوسنك خطوط مثلثاتيه‌سی قيمت عدديه‌لريله تمامی اولان (ب ىَ) قوسنك خطوط مثلثاتيه‌سنه مساوی ايسه‌لرده فقط برنجی قوسك (م ط) تمام جيبی و (م ل) قاطعی

ایکنجی قوسك ( ءَ طَ ) ( م ه ) تمام قاطعی عین اشارتده بولندقلرن خصوص مذکوردن مستثنادر .

( $\frac{\pi}{2}$ ) مقدارینك ( ب ء ) قوسندن طرحنده دخی ذکر اولنان صورتك عینی حصوله کلور.

امدی بر قوسه ( $\frac{\pi}{2}$ ) مقداری ضم ویا قوس مذکوردن اولمقدار طرح ایدیله جك اولور ایسه مثلثات خطلری تماملری اولان قوسلرك مثلثات خطلرینه تبدل ایدوب قوس معلومك تمام جیب وقاطعی مستثنا اولدیغی حالده مختلف اشارت اخذ ایدرلر.

بو جهتله :

$\frac{\pi}{2}$ + ه قوسنك تمامی − ه اولدیغندن + ه ایله − ه قیمتجه مساوی ایسه لرده اشارتجه مغایردرلر.

حس ( $\frac{\pi}{2}$ + ه ) = تحس ( − ه ) = تحس ه

تحس ( $\frac{\pi}{2}$ + ه ) = حس ( − ه ) = − حس ه

مم ( $\frac{\pi}{2}$ + ه ) = تمم ( − ه ) = − تمم ه

تمم ( $\frac{\pi}{2}$ + ه ) = مم ( − ه ) = − مم ه

قع ( $\frac{\pi}{2}$ + ه ) = تقع ( − ه ) = − تقع ه

تقع ( $\frac{\pi}{2}$ + ه ) = قع ( − ه ) = − قع ه

اولوب اکر طرح اولنه جق اولور ایسه کذا عینی حال کوریلور.

# ایکنجی فصل

## باب اول

### « مثلثات دستورلری »

برقوسك خطوط مثلثاتیه‌سی آراسنده اولان مناسبات

**۲٤ — اساس دستورلری.** برقوسك خطوط مثلثاتیه‌سی ایچون مثلثاتك دستورات اساسیه‌سنی تأسیس ایدن مختلف بش دستور واردرکه هر برلری بر وجه آتی استخراج اولنور.

(شکل ۲۸) برنجی ربع محیطده مأخوذ (ب د) قوسی (ه) حرفیله ارائه اولندقده قوس مذکورك نصف قطر ایله جیب وتجیبندن متشکل (م د ط) مثلث قائم الزاویه‌سندن $(\text{د ط})^2 + (\text{م ط})^2 = (\text{م د})^2$ یاخود $\text{حس}^2\ \text{ه} = 1$ (۱) اولور.

(شکل ۲۸)

(م ل ب) و (م د ط) مثلثلرینك مشابهتدن $\frac{\text{ب ل}}{\text{ب م}} = \frac{\text{د ط}}{\text{م ط}}$ یاخود $\text{مم ه} = \frac{\text{حس ه}}{\text{تحس ه}}$ (۲)

و $\frac{\text{م ل}}{\text{م ب}} = \frac{\text{م د}}{\text{م ط}}$ یاخود $\text{قع ه} = \frac{1}{\text{تحس ه}}$ (۳) وکذا

(م ه ج) و (م د ك) مثلثلرینك مشابهتلرندن

$\frac{\text{حه}}{\text{مح}} = \frac{\text{كد}}{\text{مك}}$ ياخود ظم ه $= \frac{\text{محس ه}}{\text{حس ه}} = \frac{1}{\text{ظم ه}}$ (٤)

و $\frac{\text{مه}}{\text{مح}} = \frac{\text{مد}}{\text{مك}}$ ياخود مع ه $= \frac{1}{\text{حس ه}}$ (٥) اولور.

**۲۵ — دستورات اساسیەنك تعمیمی.** (ب د) قوسی برنجی ربع محیط داخلنده فرض وقیاس ایدلمشدی فقط ذکر اولنان اساس دستورلرینك هر قنغی برقوس ایچون دخی صحیح اولدقلری قولایلقله تفتیش اولنەبیلور.

فی‌الحقیقه مثلثات خطلرینك اخذ ایتدکلری قیم مطلقەلری (ماده ۲۳) برنجی ربع محیطده النان قوسك قیمت مطلقەلرینه نظراً متحول دکللر ایسەده اشارتلرینی تفتیش وتحقیق ایتمك کافیدر.

بو حالده (۱) دستوری یالکز قیمت اصلیهٔ مثبته مربعلرینی حاوی اولدیغندن هر صورتله صحیحدر.

مماس وتمام مماس برنجی واوچنجی ربع محیطلرده مثبت ودیکر ایکیسنده منفی اولورکه افادهٔ مذکورەیی (۲) و (٤) دستورلری دخی تأیید ایدرلر زیرا جیب وتمام جیب برنجی واوچنجی ربع محیطلرده عین اشارتده اولوب دیکر ایکی ربع محیطده عکسی اشارتده بولنور.

الحاصل (۳) و (٥) دستورلری کذلك عمومیدرلر چونکه قاطع ایله تمام جیبك وتمام قاطع ایله جیبك اشارتلری مماثلدر.

**۲٦** — ذکری مسبوق بش اساس دستورلری ترکیب ایدیلەرك بر قوسك مثلثات خطلرندن یالکز بریسنك معلوم

اولمسیله پك چوق دستورلر استخراج ایدیله‌بیلور ازجمله ۲ و ٤ رقملی مناسبات طرفه ضرب اولندقده مم ۞ عم ۞ = ۱ یاخود عم ۞ = $\frac{۱}{مم ۞}$ اولور .

اشبو دستور تمام مماسك مماسك عكسی ترتیبنه مساوی اولدیغنی كوسترر .

كذا ۳ و ٥ رقملی دستورلر قاطع تمام جیبك عكسی ترتیبنه وتمام قاطع جیبك عكسی ترتیبنه مساوی اولدقلرینی ارائه ایدرلر .

امدی بر عددك عكسی ترتیبله مستطیلی واحد اولدیغندن بر قوسك التی عدد مثلثات خطلرینك حاصل ضربلری واحد اولور چونكه مذكور خطلر ایكیشر ایكیشر معكوسدرلر .

۳ رقملی مناسبات واسطه‌سیله ۲ رقملی مناسباتدن

مم ۞ = حس ۞ قع ۞ مثللو یازیله‌بیلوب اصل خطلر بیننده موجود مناسباتی تاسیس ایدر .

وكذا عم ۞ = محس ۞ هع ۞ یازیلوب تمامی خطلر بیننده موجود مناسباتی تاسیس ایدر .

وبونلردن بشقه شكل ۲۸ ( م ب ل ) مثلث قائم الزاویه‌سندن ۱ + مم$^{۲}$ ۞ = قع$^{۲}$ ۞ و ( م ح ه ) مثلث قائم الزاویه‌سندن دخی ۱ + عم$^{۲}$ ۞ = هع$^{۲}$ ۞ دستورلری تشكیل اولنور ایسه‌ده فقط اشبو ایكی دستور بوندن اولكی دستورلرده داخل اولدیغندن نادراً استعمال اولنورلر .

**٢٧ — خطوط مثلثاتیه‌نك اره‌سنده بروجه بالا بشدن زیاده دستورده**
**زیاده بولنماز.**

چونکه بر قوسك مثلثات خطلرندن بری معلوم اولدقده مذکور قوسك سائر مثلثات خطلری تعیین اولنورلر بو جهتله بری معلوم بولنــدیغی حالده مجهول اولان دیکر بش دستور استخراج اولنه‌بیلمك ایچون التی مثلثات خطی ارهسنده مستقل بش مناسبت موجوددر اکر بو دستورلردن بردیکریده بولنسه ایدی بونك اوزرینه التی عدد مثلثات خطلری التی معادله ایله آیری آیری بولنور واولوقت هر برینك منسوب اولدیغی قوسه کوره یالکز مطلق بر قیمتی اولور ایدی بو ایســه غیر مقبول ومناسبتسز برصورتدر.

**٢٨ — خطوط مثلثاتیه‌دن بریسی واسطه‌سیله برقوسك سائر مثلثات خطلری.** خطوط مثلثاتیه‌دن بری معلوم اولدقجه برقوسك سائر خطوط مثلثاتیه‌سی اساس دستورلری واسطه‌سیله استخراج اولنه‌بیلوب (١) رقملی دستور تجیب تابعنه نظراً جیبی ویاخود جیب تابعنه کوره تجیبی اعطا ایدر بو بابده

$$\text{حس } \text{ە} = \pm \sqrt{1 - \text{تحس}^{2}\ \text{ە}}$$

$$\text{تحس } \text{ە} = \pm \sqrt{1 - \text{حس}^{2}\ \text{ە}}$$

اشبو خطلر معکوســلری وانلرك خارج قسمتی خطوط سائره‌یی اعطا ایدر.

مار الذکر تحصیل اولنـان ضعف قیمت بالسهوله تفتیش اولنه‌بیلور چونکه بر تجیب معلوم اشارتلری مختلف مسـاوی قوسلره توافق ایدر امدی مذکور قوسلرك جیبلری مسـاوی واشـارتلری مختلفدر بو حالده حس ه خطی محس ه تابعیله افاده اولندقده مذکور نتیجه تعین ایدر .

وبو مثللو برجیب معلومك توافق ایتـدیکی متمم قوسلرك تمام جیبلری مساوی وفقط اشارتلری مخالفدر.

تجیب ه خطی جیب ه تابعیله افاده اولندقده مار الذکر ضعف قیمت تعین ایدر .

برقوسك مماس تابعیله قوس مذکورك خطوط مثلثاتیه‌سنك افاده‌سی

اولامرده (دستور ٤) $\text{مم ه} = \frac{1}{\text{مم ه}}$

(دستور ٢) $\frac{\text{حس ه}}{\text{محس ه}} = \frac{\text{مم ه}}{1}$ دستورلرینی تربیع ایله

$\frac{\text{حس}^2\text{ ه}}{\text{محس}^2\text{ ه}} = \frac{\text{مم}^2\text{ ه}}{1}$ مثللو تحریر اولنه‌بیلور .

امدی کسرلرك مخرجلرینه کندی صورتلری ویا صورتلرینه مخرجلری ضم اولندقده

$$\frac{\text{حس}^2\text{ ه}}{\text{حس}^2\text{ ه} + \text{محس}^2\text{ ه}} = \frac{\text{مم}^2\text{ ه}}{1 + \text{مم}^2\text{ ه}} \text{ یاخود}$$

$$\frac{\text{حس}^2\text{ ه}}{1} = \frac{\text{مم}^2\text{ ه}}{1 + \text{مم}^2\text{ ه}} = \text{ و } \frac{\text{حس}^2\text{ ه} + \text{محس}^2\text{ ه}}{\text{محس}^2\text{ ه}} =$$

$$\frac{\text{١ + مم}^{2}\text{ ه}}{\text{١}} \;\text{ ياخود }\; \frac{\text{١}}{\text{محس}^{2}\text{ ه}} = \frac{\text{١ + مم}^{2}\text{ ه}}{\text{١}}$$

معادله‌لری حاصل اولوب بونلردن

$$\text{حس ه} = \frac{\text{مم ه}}{\pm\sqrt{\text{١ + مم}^{2}\text{ ه}}} \qquad (٦)$$

$$\text{ومحس ه} = \frac{\text{١}}{\pm\sqrt{\text{١ + مم}^{2}\text{ ه}}} \qquad (٧)$$

دستورلری تحصیل اولنور .

الحاصل $\text{قع ه} = \frac{\text{١}}{\text{محس ه}}$ $\quad$ $\text{نعع ه} = \frac{\text{١}}{\text{حس ه}}$

دستورلرنده (حس ه) و (محس ه) یرینه (٦) و (٧) دستور-
لرنده‌کی قیمتلری وضع اولنور ایسه

$$\text{نعع ه} = \pm\frac{\sqrt{\text{١+مم}^{2}\text{ه}}}{\text{مم ه}}$$

$$\text{قع ه} = \pm\sqrt{\text{١+مم}^{2}\text{ه}}$$

دستورلری حاصل اولور .

(قع ه) دستوری (م ب ل) مثلث قائم الزاویه‌سندن
طوغریدن طوغری‌یه تحصیل اولنه‌بیلور واشبو نسبت مستحصله‌ده
(قع ه) محلنه مساویسی اولان $\frac{\text{١}}{\text{محس ه}}$ وضع اولنه‌جق اولور
ایسه ینه (٧) رقملی دستور تحصیل اولنور . . . . الخ .

وعلى العموم برقوسك خطوط مثلثاتيه‌سی بیننده‌کی مناسباتی استخراج ایتمك ایچون اساس دستورلرینك ایکیسی بیننده بر مثلثات خطی ویاخود دستورات مذکوره‌نك اوچی اره‌سنده ایکی خطك محو وافناسی کافیدر .

**۲۹** — تنبیه . ذکر اولنان دستورلرده‌کی تحصیل اولنان ضعف قیمت سهولتله اکلاشیلور بونك ایچون اعطا اولنان بر مماس یالکز برقوسی تعیین ایتمیوب فقط قطراً قارشولقلی نقطه‌لردن مرور ایدن نامتناهی قوسلره‌ده شمولی اولور امدی مماس وتمام مماس مستثنا اولدقلری حالده اشبو قوسلرك خطوط مثلثاتیه‌لری ( ماده ۲۱ ) قیمتجه مساوی واشارتجه مختلف بولنورلر مثلا (شکل ۲۹) (ب ل) مماسی (ى) و (ىَ) ل نقطه‌لرنده نهایت بولان بالجمله قوسلره شمولی درکار ایسه‌ده (ى) نقطه‌سنه منتهی بالجمله قوسلرك مثلثات خطلری مثبت اولوب حالبوکه (ىَ) نقطه‌سنده نهایتلنان قوسلرك بالعکس جیب وتمام جیب وقاطع وتمام قاطعلری منفی اوله‌رق واقع اولور .

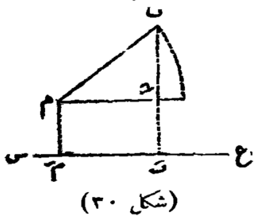
(شکل ۲۹)

اکر قوس مفروض معلوم اوله‌رق اعطا اولنور ایسه اشبو محذور برطرف ایدیلور .

## ﴿ باب ثانی ﴾

### مرتسمات

۳۰ . — هرقنغی بر ( م ب ) خط مستقیم محدودینك (شكل ۳۰) س ع محور مفروضی اوزرندەكی مرتسمی خط مذكورك ایكی نهایتلرینك محور اوزرندە (مَ بَ) مرقلری بیندەكی (مَ بَ) بعدندن عبارت اولوب اكر خط




(شكل ۳۰)

مستقیم مفروضك محوزه اولان میلنه احتیاج حاصل اولور ایسه نهایتلرینك برندن حركت ایدن برنقطهٔ متحركه استقامتدەكی جهتنه اعتبار اولنمق لازم ایسەدە جهات متعددەدن برینك انتخابندەكی ملاحظەیی برطرف ایتمك ایچون خط مستقیمك حركت نقطەسندن محورە موازی برخطك رسمی فرض اولنوب تشكلی تصور اولنان زاویه خطك كندیسیله موازی بیننده حصوله كلان زاویه اولور بناءً علیه (شكل ۳۱) م نقطەسندن اعتباراً ( م ب ح د ه ) جهتندە قطع اولنمش ذوكثیر الاضلاع ضلعلرینك (س ع) محوریله تشكیل ایلدكلری زاویەلر (م، ه، ط، ے ) زاویەلرندن عبارت اولور .

۳۱ — دعوای اساسی . برخط مستقیم محدودك مرتسمی

خط مذکور طولنك استقامتی جهتنده مرتسم محوریله تشکیل ایلدیکی زاویه تجییله مستطیلنه مساوی اولور .

فی الحقیقه (شکل ٣٠) (م ب) خط مستقیم مفروضنك (م) نقطه‌سندن (س ع) محورینه موازی (م ح) رسم اولندقده موازئ مذکور (ب ح) خطنك مرتسمی اولان (مَ بَ) خطنه مساوی اولوب لکن $\frac{\text{م ح}}{\text{م ب}}$ = تجب ح م ب اولمغله مَ بَ = م ب × تجب ح م ب اولور.

نتیجه — برمثلث قائم الزاویه‌ده ضلع قائملردن هربری وتر قائمه‌نك مجاور زاویه تمام جیبنه ویاخود مقابل زاویه جیبنه ضربنه مساوی اولور.

**٣٢**. — **دعوی**. (شکل ٣١) هر قنغی (م ب ح ٮ ه) ذو کثیر الاضلاع چوره‌سنك (س ع) محوری اوزرینه دوشن مرتسمی نقطهٔ متحرکه‌نك مبدأ ایله انتهاسنه موصول خطك مرتسمنه مساوی اولور.



(شکل ٣١)

زیراکه زاویه‌سی منفرجه اولدیغندن تمام‌جیبی منفی اولمغله (ه ل) خطنك مرتسمی دخی بالطبع منفی اولور بوحالده ذوکثیر الاضلاع چوره‌سنك مرتسمی مَ بَ + بَ حَ + حَ ٮَ — ٮَ هَ مجموعنه یاخود (م) نقطهٔ متحرکه‌سیله (ه) نقطهٔ مواصله‌سی بیننه وصل اولنان خطك (مَ هَ) مرتسمنه مساوی اولور.

**۳۳** .— سبق ايدن دعوى مثلثات دستورلرينك بر چوغنى اك بسيط واك عمومى اوله‌رق حصوله كتورر. وعلوم رياضيه‌نك اقسام مختلفه‌سنده كثيرالاستعمالدر. ايكى قوس مجموع ويا فضلنك جيب وتمام جيبنى تعيين ايتمك ايچون بر وجه زير تطبيق اولنور.

**برنجى اصول. مرتسم واسطه‌سيله حل.** ب د = ه ، د ط = ط اولمق اوزره ايكى قوس فرض اولندقده (شكل ۳۲) م ط ، م د نصف قطرلرى وصل اولنوب (ط) نقطه‌سندن (م د) خطنه (ط ح) عمودى رسم ، م ح ط خط منكسرينك م س ، م ع محورلرى اوزرينه مرتسمى تعيين اولندقده (ماده ۳۲) موجبنجه (م ط) خطنك م س محورى اوزرينه دوشن مرتسمى (م ح) و (ح ط) خطلرينك مرتسملرى مجموعنه مساوى اولور. بو حالده (م ط) خطنك مرتسمى اولان م ز = تجب (ه + ط) اولور.

(شكل ۳۲)

لكن مرتسم م ح = م ح × تجب ه = ياخود تجب ط × تجب ه اولور. مرتسم ح ط = ح ط × تجب ط ح ه اولوب ولكن ط ح ه زاويه‌سنك تمام جيبى كندى متممى اولان ط ح ا زاويه‌سنك تمام جيبنه مساوى وفقط اشارتى معكوس اولديغندن وينه ط ح ا زاويه‌سنك تمام جيبى كندى تمامى اولان م ح ا زاويه‌سنك جيبى اولديغندن بوصورتده مرتسم ح ط = — جب ه ×

جب ط بولنمقله مساوات مذكوره محللرینه وضع اولنـەرق
تجب (ه+ط) = تجب ط تجب ه — جب ط جب ه
(ل) دستوری تحصیل اولنور.

واشبو (ل) دستورنده (ط) محلنه (—ط) وضع اولندقده
تجب(ه — ) = تجب ه تجب (— ط) — جب ه جب
(—ط) دستوری تشكل ایدەرك بو حالده (ماده ۲۲) تجب ه =
تجب (— ه) وجب (— ه) = — جب ه اولدقلرندن
بو صورتده

تجب (ه — ط) = تجب ه تجب ط + جب ه جب ط
اولور. وكذا م ط نك م ع محوری اوزرینه دوشن مرتسمی
م ح، ح ط خطلرینك مرتسملری مجموعنه مساوی اولدیغندن
بو حالده

م ط نك مرتسمی م ك یاخود جب (ه + ط) اولور.
مرتسم م ح = م ح تجب ح م ع = م ح جب ه
= تجب ط جب ه،

مرتسم ح ط = ح ط تجب ط ح ا اولور. حالبوكه
ط ح ا زاویەسی ضلعلرینك نظیر نظیره عمود اولمسندن ه
زاویەسنه مساوی اولمقله بو حالده

مرتسم ح ط = جب ط تجب ه اولور

بوتقدیرجه

حس (ه + ط) = حس ه تحس ط + حس ط تحس ه

(ى) بولنور .

ط محلنه — ط قونيلهرق

حس (ه — ط) = حس ه تحس ط — حس ط تحس ه

(ك) بولنور .

تنبيه — ل ، ه دستورلرنده ه محلنه $\frac{\pi}{٢}$ + ه قونيلهرق (ى ، ك) دستورلرى بتكرار تحصيل اولنورلر .

تحس [ط + (ه + $\frac{\pi}{٢}$)] = تحس (ه + $\frac{\pi}{٢}$) ×

تحس ط — حس (ه + $\frac{\pi}{٢}$) حس ط اولوب بو حالده

(تطبيقات ٦)

تحس (ط + ه + $\frac{\pi}{٢}$) = — حس (ه + ط)

وتحس (ه + $\frac{\pi}{٢}$) = — حس ه وحس (ه + $\frac{\pi}{٢}$) .

= — تحس ه اولدقلرندن بو صورتده

حس (ه+ط) = حس ه تحس ط + حس ط تحس ه

اولور . . . . . (ه)

الحاصل اشبو (ه) دستورنده (ط) يرينه (— ط) وضع اولندقده حس (ه — ط) = حس ه تحس ط — حس ط

× تحس ه اولور . . . . . (ح)

دائمى صورتده استعمال اولنان اشبو دستورات اربعه شو وجهله بيان اولنورلر.

حس (ه + ط) حس ه محس ط + حس ط محس ه ...... (٨)

حس (ه — ط) = حس ه محس ط — حس ط محس ه ...... (٩)

محس (ه + ط) = محس ه محس ط — حس ه حس ط ...... (١٠)

محس (ه — ط) ه محس ه محس ط + حس ه حس ط ...... (١١)

تنبیه ٢ — بو اصول ٣١ مادهسی واسطهسیله ظهور ایدوب تحصیل اولنان دستورلر (ط) و (ی) نقطهلرینك موقعی نره‌ده اولورسه اولسون هیچ برمناقشه احداث ایتمزلر.

## ﴿ باب ثالث ﴾

### ٣٤ . — ایکی قوسك مجموع ویا فضلنك خطوط مثلثیه سی.

ایکی قوسك جیب وتمام جیبلری معلوم ایکن قوسین مذکورین مجموع ویا فضلنك جیب وتمام جیبنی تعیین ایتمك

ایکنجی اصول (شکل ٣٣) حل هندسی. ب ی = ه , ی و = ط قوسلری فرض اولندقده ب و = ه + ط اولوب و(م ب) و(م ی) خطلری رسم و(م ی) خطی اوزرینه (و =) عمودی تنزیل و(م ب) نصف قطری اوزرینه (وح),

(ی یَ) و(حَ ل) عمودلری و(و ح) خطی اوزرینه دخی حَ ط
عمودی ترسیم ایدلدکده بو صورتده

حس (ه + ط) = و ح = حَ ل + و ط (١)

تحس (ه + ط) = م ح = م ل — ل ح =
م ل — ط حَ (٢) اولورلر.

حَ ل، و ط، م ل، حَ ط مثلثات خطلرینك تعیینی
ایچون دخی (و حَ ط) و (م ی یَ) مثلثلرینك مشابهتدن

و ط / م ح = حَ ط / ی یَ = و حَ / م ی=١ اولوب بورادن

و ط = م یَ × و حَ تحس ه حس ط

حَ ط = ه یَ × و حَ = حس ه حس ط

اولور.

(شکل ٣٣)

وینه م حَ ل، م ی یَ مثلثلرینك مشابهتدن

حَ ل / ی یَ = م ل / م یَ = م حَ / م ی یاخود ١ اولمغله اشبو تناسبدندخی

حَ ل = ی یَ × م حَ = حس ه تحس ط

م ل = م یَ × م حَ = تحس ه تحس ط اولدیغندن
اشبو قیمتلر ١ و ٢ رقملریله اشعار اولنان معادلهلرده محلنه
وضع اولندقلرنده

حس (ه×ط) = حس ه تحس ط + حس ط تحس ه

(٨)

(ماده ٢٢) ط محلنه ( — ط ) وضعیله

حب ( ة + ط ) = حب ة حب ط — حس ة حس ط

(٩)

حب (ة — ط) = حب ة حب ط + حس ة حس ط

(١٠)

بو اصول ایله تحصیل اولنان دستورلرك عمومیتی دیكر ربعلرده صحتنی اثباتله تأسس ایدر حالبوكه برنجی اصول بو اثباتی غیر مقتضیدر چونكه تعیین اولنان قوسلر ایچون موقع انتخابی ایجاب ایتمز .

---

مذكور دستورلر بروجه زیر دها بسیط اولەرق استخراج اولنور.

داخل دائرەده مرسوم ذوار بعة الاضلاعك (نظری عملی هندسه) قطرلرینك حاصل ضربی مقابل ضلعلرینك حاصل ضربلری مجموعنه مساوی اولدیغندن (شكل ٣٤) ب ء وتری نصف قطری واحد اولان دائرەنك قطری اولدیغنه نظراً

ه ب ء = ة ، ء ب ح = ه ط فرضیله (ماده ٩ و ٢٢ تطبیقات ٦)

ه ء = ٢ حس ة ، ب ه = ٢ حب ة

ء ح = ٢ حس ط ، ب ح = ٢ حب ط

ه ح = ٢ حس (ة + ط) اولملریله وحالبوكه

ب ء × ه ح = ء ه × ب ح + ء ح × ب ه اولدیغندن مساویلر محلنه وضع اولندقده

٢ × ٢ حس (ة + ط) = ٢ حس ة

× ٢ حب ط + ٢ حس ط × ٢ حب ة

(شكل ٣٤)

حس (ة + ط) = حس ة حب ط + حس ط حب ة

اولور .

بو وجهله دیكرلریدخی استخراج اولنەبیلور .

**٣٥ — ايكى قوسك مماس تابعلرى معلوم ايكن مجموع ياخود تفاضللرينك مماسنى تعيين ايتمك .**

(٢) رقملى دستور ايله $\text{م ه} = \dfrac{\text{حس ه}}{\text{تحس ه}}$ دستوردن

$$\text{م (ه + ط)} = \dfrac{\text{حس (ه + ط)}}{\text{تحس (ه + ط)}}$$ اولوب اشبو

حس (ه + ط) وتحس (ه + ط) دستورلرى مساوات مخصوصه‌لريله توسيع اولندقده

$$\text{م (ه + ط)} = \dfrac{\text{حس ه تحس ط + حس ط تحس ه}}{\text{تحس ه تحس ط — حس ه حس ط}}$$ اولور.

ايكنجى طرف صورت ومخرج تحس ه تحس ط ايله تقسيم اولندقده

$$\text{م (ه + ط)} = \dfrac{\dfrac{\text{حس ه تحس ط}}{\text{تحس ه تحس ط}} + \dfrac{\text{حس ط تحس ه}}{\text{تحس ه تحس ط}}}{\text{١} - \dfrac{\text{حس ه حس ط}}{\text{تحس ه تحس ط}}}$$ ياخود

$$\text{م (ه + ط)} = \dfrac{\dfrac{\text{حس ه}}{\text{تحس ه}} + \dfrac{\text{حس ط}}{\text{تحس ط}}}{\text{١} + \dfrac{\text{حس ه حس ط}}{\text{تحس ه تحس ط}}}$$

اولوب فقط $\frac{\text{حس ه}}{\text{محس ه}} = \text{مم ه}$ و $\frac{\text{حس ط}}{\text{محس ط}} = \text{مم ط}$

اشبو مساویلر محللرینه وضع ایدلدکده

$$\text{مم}\,(\text{ه} + \text{ط}) = \frac{\text{مم ه} + \text{مم ط}}{١ - \text{مم ه مم ط}} \qquad (١٣)$$

ط محلنه ( — ط ) وضعیله

$$\text{مم}\,(\text{ه} - \text{ط}) = \frac{\text{مم ه} - \text{مم ط}}{١ + \text{مم ه مم ط}} \qquad (١٣)'$$

ه = $٤٥^\circ$ فرض اولنوب (١٢) رقملی مناسبت موجبنجه

$$\text{مم}\,(٤٥^\circ + \text{ط}) = \frac{١ + \text{مم ط}}{١ - \text{مم ط}}$$

$$\text{مم}\,(٤٥^\circ - \text{ط}) = \frac{١ - \text{مم ط}}{١ + \text{مم ط}}$$ اولور

ایکی قوسك مجموع ویا فضلنك تمام مماسی ایچون دخی بروجه آتی دستور حسابه موافقدر.

$$\text{تمم}\,(\text{ه} \pm \text{ط}) = \frac{\text{تمم ه تمم ط} \mp ١}{\text{تمم ه} \pm \text{تمم ط}}$$ اولور.

# باب رابع

## قوسلرك اضعاف واجزالرینك خطوط مثلثاتیه‌لری

**۳۶** — ( جب ه و تجب ه و م ه **تابعلری معلوم ایکن** جب ۲ ه و تجب ۲ ه و م ۲ ه **قیمتلرینی تعیین ایتمك** )

ایکی قوس مجموعنك مثلثات خطلرینی اعطا ایدن دستورلرده ط = ه فرضیله بر قوسك ضعفنك مثلثات خطلری تعیین اولنور . بناءً علیه

جب (ه + ط) = جب ه تجب ط + جب ط تجب ه

---

۱٤ و ۱٥ دستورلری طوغریدن طوغری‌یه دخی بروجه زیر اثبات واستخراج اوله‌بیلور.

مثلا (شکل ۳۵) ب ج ء مثلث قائم الزاویه‌سنك ب زاویهٔ قائمه‌سی رأسندن وتری اوزرینه ب هـ عمودی تنزیل اولندقده عمود مزبور ج = ه زاویه‌سنك ضعفی اوله‌رق مرکزده تشکل ایدن ب م ء زاویه‌سنك جیبی اولوب حالبوکه

(شکل ۳۵)

ج ء × ب هـ = ب ء × ب ج اولمغله بوحالده

۲ جب ۲ ه = ۲ جب ه × ۲ تجب ه ویاخود

جب ۲ ه = ۲ جب ه تجب ه اولور .

وکذا ب ج^۲ — ب ء^۲ = ج ء (هـ ج — ء هـ) = ج ء × ۲ م هـ = ٤ م هـ اولوب بو حالده ٤ تجب ۲ ه = ٤ تجب^۲ ه — ٤ جب^۲ ه یاخود تجب ۲ ه = تجب^۲ ه — جب^۲ ه اولور .

دستورنده ط = ۞ فرض اولندقده

$$\text{حس } ٢ ۞ = ٢ \text{ حس } ۞ \text{ تحس } ۞ \quad (١٤)$$

$$\text{وتحس } (۞+ط) = \text{تحس } ۞ \text{ تحس } ط - \text{حس } ۞ \text{ حس } ط$$

دستورندن دخی ط = ۞ فرضیله

$$\text{تحس } ٢ ۞ = \text{تحس}^{٢} ۞ - \text{حس}^{٢} ۞ \quad (١٥)$$

$$\text{والحاصل } ﻡ \ (۞ + ط) = \frac{ﻡ ۞ + ﻡ ط}{١ - ﻡ ۞ ﻡ ط} \quad [*]$$

دستورندن دخی ط = ۞ فرض اولنه‌رق

---

[*] مذکور دستورلر ترسیماً دها بسیط اوله‌رق استخراج اولنور. مثلا (شکل ٣٦) فرض اولنان ایکی قوسدن ب ء = ۞، ء ل = ط ایله کوستر‌لدیکی حالده ب، ء نقطه‌لرندن ب ه، ءَ ۞ خط مماسلری رسم اولندقده ﻡ (۞ + ط) = ب ه اولور. حاصل اولان ه ﻡ ب، ۞ ﻡ ءَ مثلثلرینك ﻡ رأس زاویه‌سیله نصف قطردن عبارت بولنان ارتفاعلری مساوی اولدیغندن

$$\frac{ب ه}{۞ ءَ} = \frac{ﻡ ب \times ﻡ ه}{ﻡ ءَ \times ﻡ ۞} \quad \text{اولور.}$$

(شکل ٣٦)

حالبوکه ﻡ ه : ﻡ ۞ = ﻡ ط یاخود ﻡ ءَ : ﻡ ى اولدیغندن بو صورتده

$$\frac{ب ه}{۞ ءَ} = \frac{ﻡ ب}{ﻡ ى} \quad \text{ویاخود}$$

$$\text{مم}\ ٢\text{ه} = \frac{٢\ \text{مم}\ \text{ه}}{١ - \text{مم}^{٢}\ \text{ه}} \qquad (١٦)$$

دستورلری حاصل اولور .

تنبیه — استخراج اولنان اوچ دستورده ه و ٢ ه مقدارلرندن برنجی ایکنجینك نصفی اولمق شرطیله مربوط اولوب بو صورتده ( ٢ ه ) مقداری ( ه ) ایله و ( ه ) مقداری ( $\frac{١}{٢}$ ه ) ایله وضع اولندقلرنده بروجه آتی دستورلر ظهور ایدر .

---

$$\text{ب ه} = \frac{\text{م ب} \times \text{ه ءَ}}{\text{م ق}} = \frac{١ \times \text{ه ءَ}}{\text{م ق}} \ \text{اولەرق}$$

$$\text{ب ه} = \frac{\text{ه ءَ}}{\text{م ق}} \ \text{اولور}$$

ه ءَ = مم ه + مم ط اولدیغندن مساویلر محللرینه وضع ایله

$$\text{مم}\ (\text{ه} + \text{ط}) = \frac{\text{مم}\ \text{ه} + \text{مم}\ \text{ط}}{\text{م ق}} = \frac{\text{مم}\ \text{ه} + \text{مم}\ \text{ط}}{١ - \text{ق ء}} \ \text{اولور}$$

لکن ق ه ء ، م ء ءَ مثلثلرینك مشابهتندن

$$\frac{\text{ق ء}}{\text{ء ءَ}} = \frac{\text{ه ء}}{\text{م ء}} \ \text{اولمغله}$$

ق ء = مم ه مم ط اولەرق مساویسی محلنه وضع ایله

$$\text{مم}\ (\text{ه} + \text{ط}) = \frac{\text{مم}\ \text{ه} + \text{مم}\ \text{ط}}{١ - \text{مم}\ \text{ه}\ \text{مم}\ \text{ط}} \ \text{بولنور.}$$

حب ه = ٢ حب ١/٢ ه تحب ١/٢ ه (ب)

تحب ه = تحب² ١/٢ ه — حب² ١/٢ ه (ح)

مم ه = ٢ مم ١/٢ ه / (١ — مم² ١/٢ ه) (١٧)

(٨) و (٩) و (١٢) رقملى دستورلرده ط = ٢ ه و ٣ ه و ٤ ه ‌. . . . . الخ فرض اولنه‌رق ٣ ه و ٤ ه و ٥ ه قوسلرينك جيب وتمام جيب ومماسلرى تحصيل اولنور .

ازجمله ط = ٢ ه و٣ ه و٤ ه . . . فرضيله ٨ و٩ و١٢ دستورلرنده محلنه‌وضع ايدرك ١٤، ١٥، ١٦دستورلرى‌واسطه‌سيله

حب ٣ ه = ٣ حب ه — ٤ حب³ ه

وتحب ٣ ه = ٤ تحب³ ه — ٣ تحب ه اولور .

(١٢) رقملى دستورده ط محلنه ٢ ه وضعيله

مم ٣ ه = (مم ه + مم ٢ ه) / (١ — مم ه مم ٢ ه)

اولوب مم ٢ ه محلنه ١٦ دستورنده‌كى قيمتى وضع برله

مم ٣ ه = (٣ مم ه — مم³ ه) / (١ — ٣ مم² ه) تحصيل اولنور.

**٣٨ — (تحب ه تابعيه، يعنى تحب ه معلوم فرضيله، حب ١/٢ ه وتحب ١/٢ ه ومم ١/٢ ه قيمتلرينى تعيين ايتمك).**

حس $\frac{١}{٢}$ ۀ ومحس $\frac{١}{٢}$ ۀ دستورلرینی تحصیل ایچون برنجی واون بشنجی دستورلر برکره جمع وطرح اولندقلرنده

$$\text{محس}^{٢}\,ۀ + \text{حس}^{٢}\,ۀ = ١ \qquad (١)$$

$$\text{محس}^{٢}\,ۀ - \text{حس}^{٢}\,ۀ = \text{محس}\ ٢\,ۀ \qquad (١٥)$$

$$\text{محس}^{٢}\,ۀ = \frac{١ + \text{محس}\ ٢\,ۀ}{٢}$$

$$\text{حس}^{٢}\,ۀ = \frac{١ - \text{محس}\ ٢\,ۀ}{٢}$$ بورادن دخی

$$\text{محس}\,ۀ = \pm\sqrt{\frac{١ + \text{محس}\ ٢\,ۀ}{٢}}$$

$$\text{حس}\,ۀ = \pm\sqrt{\frac{١ - \text{محس}\ ٢\,ۀ}{٢}}$$

و (ۀ) یرینه ($\frac{١}{٢}$ ۀ) وضع اولندقده

$$\text{حس}\,\frac{١}{٢}\,ۀ = \pm\sqrt{\frac{١ - \text{حس}\,ۀ}{٢}} \qquad (١٨)$$

$$\text{ومحس}\,\frac{١}{٢}\,ۀ = \pm\sqrt{\frac{١ + \text{محس}\,ۀ}{٢}} \qquad (١٩)$$

تحصیل اولنان متوسط دستورلر زیاده سیله مستعمل اولدقلرندن بروجه آتی یازیلورلر

$$\text{ا} + \text{محس}\ \text{ه} = ٢\ \text{محس}^{٢}\ \tfrac{١}{٢}\,\text{ه}$$

$$\text{ا} - \text{محس}\ \text{ه} = ٢\ \text{حس}^{٢}\ \tfrac{١}{٢}\,\text{ه}$$

(١٨) و (١٩) دستورلری بربری اوزرینه تقسیم اولندقده $\text{م}\ \tfrac{١}{٢}\,\text{ه}$ تحصیل اولنور.

$$\text{م}\ \tfrac{١}{٢}\,\text{ه} = \pm\sqrt{\frac{\text{ا} - \text{محس}\ \text{ه}}{\text{ا} + \text{محس}\ \text{ه}}} \qquad (٢٠)$$

اشبو دستور حسابانده تقدیر قیمت خصوصنده مهمدر.

**٣٩. — م ه تابعی معلوم ایکن $\text{م}\ \tfrac{١}{٢}\,\text{ه}$ نك قیمتنی تعیین ایتمك.** بونك ایچون دخی

$$\text{م}\ \text{ه} = \frac{٢\ \text{م}\ \tfrac{١}{٢}\,\text{ه}}{\text{ا} - \text{م}^{٢}\ \tfrac{١}{٢}\,\text{ه}} \qquad \text{(١٧) دستوری}$$

صفره ارجاع اولندقده

$$\text{م}\ \text{ه}\ \text{م}^{٢}\ \tfrac{١}{٢}\,\text{ه} + ٢\ \text{م}\ \tfrac{١}{٢}\,\text{ه} - \text{م}\ \text{ه} = ٠$$

درجهٔ ثانیه معادله‌سی حل اوله‌رق

$$\text{م}\ \tfrac{١}{٢}\,\text{ه} = \frac{-\text{ا} \pm \sqrt{\text{ا} + \text{م}^{٢}\ \text{ه}}}{\text{م}\ \text{ه}} \qquad (٢١)$$

مثلا $\text{ه} = ٤٥^{\circ}$ اولسه $\text{م}\ \text{ه} = ١$ و $\frac{\text{ه}}{٢} = ٢٢^{\circ}\ ٣٠'$ اوله‌رق

$$\text{م}\ ٢٢^{\circ}\ ٣٠' = \frac{-١ + \sqrt{١ + \text{م}^{٢}\ ٤٥^{\circ}}}{\text{م}\ ٤٥^{\circ}} = \sqrt{٢} - ١$$

اولور.

(٢١) رقلى دستورده ﻫ < ١٨٠° اولور ايسه اشارت مثبت اولور .

زيرا $\frac{١}{٢}$ ﻫ مقداريده ٩٠° دن كوچك اوله‌جغندن مماسى مثبت اولور .

تحصيل اولنان ايكى قيمت قولايلقله تفهيم اولنه‌بيلور بونك ايچون (شكل ٣٦) اعطا اولنان مماس ب ق = م ﻫ يعنى م ﻫ قيمتى (ب ق) خطنه مساوى اولديغى حالده خط مذكور قطراً قارشولقلى و ١٨٠ درجه تفاوتنده واقع (ل) و (لَ) نقطه‌لرنده نهايت بولان بالجمله قوسلرى افاده ايتمكله م $\frac{١}{٢}$ ﻫ

(شكل ٣٦)

اراشديرلدقده مذكور قوسلرك نصفلرينك مماسلرى بولنور يعنى ٩٠ درجه تفاوتنده (ب ى) و (ب ىَ) قوسلرينك مماسلرى ياخود ب ى١ ، ب ىَ١ قوسلرينك مماسلرى (تطبيقات ٦) مختلف اشارتده بولنورلر .

بوندن فضله ذكر اولنان مماسلر تمامى زاويه‌لرينى افاده ايتدكلرندن عكسى صورتده بولندقلرى كبى (٢١) معادله‌سنك جذرلرينك مستطيلى (— ١) اوله‌رق حصوله كلوركه بو صورت بالهندسه ميدان ثبوته اخراج اولنور. زيرا (ب ى) و (ب ىَ١) قوسلرينك مماسلرى (ب ط) و (ب طَ) خطلرندن عبارت اولمغله (ط م طَ) مثلث قائم الزاويه‌سنده ب ط × ب طَ =

(م ب)^٢ = اه ب ط × (— ب ط) = — ١ اولوب مطلوب حاصل اولور.

**٤٠ — (ه) قوسنك جيبى معلوم ایکن (١/٢ ه) يعنى نصفنك جيب وتمام جيبنى تعيين ايتمك**

حس^٢ ١/٢ ه + تحس^٢ ١/٢ ه = ١ (١)

٢ حس ١/٢ ه تحس ١/٢ ه = حس ه (ب)

دستورلرى بركره جمع وبركره طرح اولندقده

(تحس ١/٢ ه + حس ١/٢ ه)^٢ = ١ + حس ه

و (تحس ١/٢ ه — حس ١/٢ ه)^٢ = ١ — حس ه

معادله‌لرى حاصل اولوب حل اولندقده

حس ١/٢ ه + تحس ١/٢ ه = ± √(١ + حس ه)

حس ١/٢ ه — تحس ١/٢ ه = ± √(١ — حس ه)

بو صورتده اشبو ايكى معادله بركره جمع وبركره طرح اولنه‌رق

٢ حس ١/٢ ه = ± √(١ + حس ه) ± √(١ — حس ه)

٢ تحس ١/٢ ه = ± √(١ + حس ه) ∓ √(١ — حس ه)

حس ١/٢ ه = [± √(١ + حس ه) ± √(١ — حس ه)] / ٢ (٢٢)

$$\text{محس}\ \tfrac{1}{2}\,\text{ه} = \frac{\pm\sqrt{1+\text{حس ه}}\ \pm\sqrt{1-\text{حس ه}}}{2} \qquad (23)$$

دستورلری حاصل اولورکه اشبو دستورلر حس $\frac{1}{2}$ ه ایچون درت وکذا محس $\frac{1}{2}$ ه ایچون دخی درت قیمت اعطا ایدرلر. بوکیفیت قولایلقله افاده اولنه‌بیلور.

مثلا (شکل ۳۷) حس ه قیمتجه (ء ط) مقدارینه معادل اولدیغی حالده حس ه (ماده ۱۶) موجبنجه (ء) و (ءَ) نقطه‌لرنده نهایتلنان بالجمله قوسلره‌ده شمولی اولوب حس $\frac{1}{2}$ ه ومحس $\frac{1}{2}$ ه دخی ارانلدیغی کبی ذکر اولنان قوسلرك نصفلرینك جیب وتجیبلری بولنه‌بیلوب امدی (ء) نقطه‌سنده نهایت بولان قوسلرك نصفلری (ل) و (لَ) نقطه‌لرنده نهایت بوللریله اکر ح ل$_1$ = ب ل النه‌جق اولور ایسه ل$_1$، لَ$_1$ نقطه‌لرنده نهایتلنان قوسلر (ءَ) نقطه‌سنه منتهی اولان قوسلرك نصفلری اولورلر بو وجهله حس $\frac{1}{2}$ ه ایچون اشارتلری مختلف وهرایکیسی بربرینه مساوی ل ه، لَ طَ، ل$_1$ ق، لَ$_1$ قَ مثللو درت قیمت حصوله کلور.

(شکل ۳۷)

وکذا محس $\frac{1}{2}$ ه دخی جیبك قیمتلرینه مساوی درت قیمتی حاوی بولنور.

اثنای تطبیقده (ه) قوسیله (ه) قوسنك جیبی معلوم ایکن مسئله غیر معین قالیوب مثبت ومنفیلکده شبهه‌لی براقلمیه‌رق حس $\frac{1}{2}$ ه وحس $\frac{1}{2}$ ه ایچون مناسب اشارتلر انتخاب اولنور.

مثلا ه = ٧٠° اولسه $\frac{1}{2}$ ه = ٣٥° اولوب حس وتمام جیب مثبت اولور بونکله برابر جیب تمام جیبدن غایت اصغر اولور ایسه بو حالده ایکی جهت‌ده مناسبتی اولور یعنی اصغرنده منفی عظمنـده مثبت اولورکه بروجه آتی مثاللردن اسـتدلال اولنور.

$$\text{حس } ٣٥° + \text{ محس } ٣٥° = + \sqrt{١ + \text{ حس } ٧٠°}$$

$$\text{حس } ٣٥ - \text{ محس } ٣٥° = - \sqrt{١ - \text{ حس } ٧٠°}$$

قیمتلری تعیین اولنذقده

$$\text{حس } ٣٥° = \frac{\sqrt{١ + \text{ حس } ٧٠°} - \sqrt{١ - \text{ حس } ٧٠°}}{٢}$$

$$\text{محس } ٣٥° = \frac{\sqrt{١ + \text{ حس } ٧٠°} + \sqrt{١ - \text{ حس } ٧٠°}}{٢}$$

اولور.

## باب خامس

«دستورلری لغارتمه ایله حساب اولنه‌جق حاله کتورمك» .

### ١٤ — ایکی مثلثات خطلری مجموع ویا فضلنك حاصل ضربه تحویلی .

بوتحویلدن مقصود خطین مذکورین مجموع ویاخود فضلنی کوسترن دستور محلنه لغارتمه ایله حسابی قابل دیکر بردستور وضع ایتمکدن عبارت اولوب الامرده ایکی جیب ویاخود ایکی تمام جیب مجموع ویاخود فضلی حل اولنه‌جق اولور ایسه

حس (ه + ط) = حس ه تحس ط + حس ط تحس ه

حس (ه — ط) = حس ه تحس ط — حس ط تحس ه

تحس (ه + ط) = تحس ه تحس ط — حس ه حس ط

تحس (ه — ط) = تحس ه تحس ط + حس ه حس ط

دستورلری ایکیشر برکره جمع وبرکره طرح اولندقده

حس (ه + ط) + حس (ه — ط) = ٢ حس ه تحس ط

حس (ه + ط) — حس (ه — ط) = ٢ تحس ه حس ط

تحس (ه + ط) + تحس (ه — ط) = ٢ تحس ه تحس ط

تحس (ه — ط) — تحس (ه + ط) = ٢ حس ه حس ط

دستورلری تحصیل اولنوب (ه + ط) = م ، (ه — ط) = ل فرض اولنور ایسه

ه = ١/٢ (م + ل) ، ط = ١/٢ (م — ل) صورتلری
حاصل اولوب بروجه بالا تحصیل اولنان دستورلر دخی

حس م + حس ل = ٢ حس ١/٢ (م + ل) ×
تجب ١/٢ (م — ل)  (٢٤)

حس م — حس ل = ٢ تجس ١/٢ (م + ل) ×
حس ١/٢ (م — ل)  (٢٥)

تجس م + تجس ل = ٢ تجس ١/٢ (م + ل) ×
تجس ١/٢ (م — ل)  (٢٦)

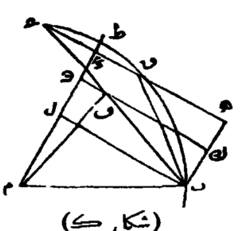
تجس م — تجس ل = ٢ حس ١/٢ (م + ل) ×
حس ١/٢ (م — ل)  (٢٧)

صورتلرینه منجر اولورلر . [*]

---

[*] مذکور دستورلر بروجه آتی طوغریدن طوغری دخی اثبات اولنه‌بیلورلر .

مثلا (شکل ک) ب ط = م، ط ح = ل ایله کوستریلدکده ب ح = م + ل، ب ی = م — ل


(شکل ک)

زاویهٔ ب ح ه = ١/٢ (م — ل)

زاویهٔ ب ی ه = ١/٢ (م + ل)

اولورلر وبنه شکلدن اکلاشلدیغنه کوره

ح ه = ب ل + ء ح یاخود

حس م + حس ل = ح ه اولور

ب ح ه مثلث قائم الزاویه‌سنده

تجس ١/٢ (م — ل) = ح ه / ح ب اولوب حالبوکه هربروترك نصفی نصف قوسنك جیبی اولدیغندن

٢ حس ١/٢ (م + ل) = ب ح اولوب اشبو ایکی معادله طرف طرفه ضرب اولندقده

مثاللر :

حس $٤٦^\circ$ + حس $٢٧^\circ$ = ٢ حس $٣٠'$، $٣٦^\circ$ محس $٣٠'$، $٩^\circ$

حس $٤٦^\circ$ — حس $٢٧^\circ$ = ٢ محس $٣٠'$ $٣٦^\circ$ حس $٣٠'$، $٩^\circ$

محس $٤٦^\circ$ + محس $٢٧^\circ$ = ٢ محس $٣٠'$، $٣٦^\circ$ محس $٣٠'$، $٩^\circ$

محس $٤٦^\circ$ — محس $٢٧^\circ$ = ٢ حس $٣٠'$، $٣٦^\circ$ حس $٣٠'$، $٩^\circ$

---

ح هـ = ٢ حس $\frac{١}{٢}$(م + ل) محس $\frac{١}{٢}$(م — ل) اولوب بو تقديرجه

حس م + حس ل = ٢ حس $\frac{١}{٢}$ (م + ل) × محس $\frac{١}{٢}$ (م — ل) وعينى اثباتله

حس م — حس ل = ء ك = ٢ محس $\frac{١}{٢}$(م + ل) × حس $\frac{١}{٢}$ (م — ل) اولور .

اكر ب ح خطنك ى منتصف نقطه‌سندن م ط خطى اوزرينه برعمود تنزيل اولنور ايسه بو حالده

محس م + محس ل = ٢ م ۂ اولوب ۂ م ى مثلث قائم‌الزاويه‌سنده محس $\frac{١}{٢}$ (م — ل) = $\frac{م ۂ}{م ى}$ اولوب بر قوسك نصف وترى اولقوسك متممى اولان قوسك نصفنك تمام جيبنه مساوى اولديغندن

محس $\frac{١}{٢}$ (م + ل) = م ى بولنوب بو ايكى معادله طرف طرفه ضرب اولندقده

محس م + محس ل = ٢ محس $\frac{١}{٢}$ (م + ل)× محس $\frac{١}{٢}$ (م — ل)

والحاصل ب هـ = محس ل — محس م =

۲۲ و ۲۳ دستورلری بربری اوزرینه تقسیم اولندقده

$$\frac{\text{حس م} + \text{حس ل}}{\text{حس م} - \text{حس ل}} =$$

---

$$\text{ب ق حس } \tfrac{١}{٢}\,(\text{م} + \text{ل}) =$$

$$\text{٢ حس } \tfrac{١}{٢}\,(\text{م} + \text{ل}) \text{ حس } \tfrac{١}{٢}\,(\text{م} - \text{ل})$$ اولور .

٤١ مادەسندە استحصال اولنان دستورلر یکدیکری اوزرینه تقسیم اولنەرق بروجه آتی دستورلره ارجاع اولنورلر.

$$\frac{\text{حس م} + \text{حس ل}}{\text{محس م} + \text{محس ل}} = \text{مم } \tfrac{١}{٢}\,(\text{م} + \text{ل})،$$

$$\frac{\text{حس م} + \text{حس ل}}{\text{محس ل} - \text{محس م}} = \text{عم } \tfrac{١}{٢}\,(\text{م} - \text{ل})،$$

$$\frac{\text{حس م} - \text{حس ل}}{\text{محس م} + \text{محس ل}} = \text{مم } \tfrac{١}{٢}\,(\text{م} - \text{ل})،$$

$$\frac{\text{حس م} - \text{حس ل}}{\text{محس ل} - \text{محس م}} = \text{عم } \tfrac{١}{٢}\,(\text{م} - \text{ل})،$$

$$\frac{\text{محس ل} - \text{محس م}}{\text{محس ل} + \text{محس م}} = \text{مم } \tfrac{١}{٢}\,(\text{م} + \text{ل}) \text{ مم } \tfrac{١}{٢}\,(\text{م} - \text{ل})،$$

$$\frac{\text{حس }(\text{م} + \text{ل})}{\text{حس م} + \text{حس ل}} = \frac{\text{محس } \tfrac{١}{٢}\,(\text{م} + \text{ل})}{\text{محس } \tfrac{١}{٢}\,(\text{م} - \text{ل})}.$$

$$\frac{\text{حس }(\text{م} - \text{ل})}{\text{حس م} + \text{حس ل}} = \frac{\text{حس } \tfrac{١}{٢}\,(\text{م} - \text{ل})}{\text{حس } \tfrac{١}{٢}\,(\text{م} + \text{ل})}.$$

$$\frac{\text{٢ حس } \frac{1}{2}\text{ (م + ل) تحس } \frac{1}{2}\text{ (م — ل)}}{\text{٢ تحس } \frac{1}{2}\text{ (م + ل) حس } \frac{1}{2}\text{ (م — ل)}}$$

لكن $\frac{\text{حس } \frac{1}{2}\text{ (م + ل)}}{\text{تحس } \frac{1}{2}\text{ (م + ل)}} = \text{مم } \frac{1}{2}\text{ (م + ل)}$

---

$$\frac{\text{حس (م + ل)}}{\text{حس م — حس ل}} = \frac{\text{حس } \frac{1}{2}\text{ (م + ل)}}{\text{حس } \frac{1}{2}\text{ (م — ل)}}،$$

$$\frac{\text{حس (م — ل)}}{\text{حس م — حس ل}} = \frac{\text{تحس } \frac{1}{2}\text{ (م — ل)}}{\text{تحس } \frac{1}{2}\text{ (م + ل)}}،$$

$$\frac{\text{حس (م — ل)}}{\text{تحس م — تحس ل}} = \frac{\text{حس } \frac{1}{2}\text{ (م + ل)}}{\text{تحس } \frac{1}{2}\text{ (م — ل)}}،$$

$$\frac{\text{حس (م — ل)}}{\text{تحس م + تحس ل}} = \frac{\text{حس } \frac{1}{2}\text{ (م — ل)}}{\text{تحس } \frac{1}{2}\text{ (م + ل)}}،$$

$$\frac{\text{حس (م — ل)}}{\text{تحس م — تحس ل}} = \frac{\text{تحس } \frac{1}{2}\text{ (م + ل)}}{\text{حس } \frac{1}{2}\text{ (م — ل)}}،$$

$$\frac{\text{حس (م + ل)}}{\text{تحس م + تحس ل}} = \frac{\text{تحس } \frac{1}{2}\text{ (م — ل)}}{\text{تحس } \frac{1}{2}\text{ (م + ل)}}،$$

اشبو دستورلر بوندن اقدمكی (شكل ك) ده دها بسيط اوله‌رق اثبات اولنه‌بيلور مثلا :

$$\frac{\text{حس م + حس ل}}{\text{تحس م + تحس ل}} = \frac{\text{ك هَ}}{\text{٢ م ل}} = \frac{\text{ب هَ}}{\text{٢ م ق}} = \frac{\text{٢ حس } \frac{1}{2}}{\text{٢ تحس } \frac{1}{2}}$$

$\frac{\text{(م + ل)}}{\text{(م + ل)}} = \text{مم } \frac{1}{2}\text{ (م + ل)}$ اولور.

$$\text{و}\ \frac{\text{تجب}\ \frac{١}{٢}(\text{م} - \text{ل})}{\text{جب}\ \frac{١}{٢}(\text{م} - \text{ل})} = \text{ظم}\ \frac{١}{٢}(\text{م} - \text{ل}) \frac{١}{\text{ظم}\ \frac{١}{٢}(\text{م} - \text{ل})}$$

اولدقلرندن اشبو مساویلر محللرینه وضع اولندقلرنده

$$\frac{\text{جب م} + \text{جب ل}}{\text{جب م} - \text{جب ل}} = \frac{\text{ظم}\ \frac{١}{٢}(\text{م} + \text{ل})}{\text{ظم}\ \frac{١}{٢}(\text{م} - \text{ل})}\ \text{اولور} \quad (٢٨)^{*}$$

---

* ایکی قوسك جیبلری مجموعنك فضلنه نسبتی قوسین مذکورین نصف مجموعنك مماسنك نصف فضلنك مماسنه نسبتی بالهندسه دخی تحصیل اولنور.

(شکل ل) ب بَ مثلثات دائره‌سنده بالفرض ب ح = ه، ب ء = ۞ قوسلری اخذاولنه‌رق ح ط ، ء ل جیبلری رسم، ح نقطه‌سندن ب بَ قطرینه موازی ح مَ دخی ترسیم ایدیله‌رك ء ل عمودی ءَ نقطه‌سنه قدر تمدید اولندقده

(شکل ل)

جب ۞ = ء ل ، جب ط = ح ط = ر ل اولمغله برکره طرح وبرکره جمع اولندقده

$$\text{جب ۞} - \text{جب ط} = \text{ء ل} - \text{ر ل} = \text{ء ر} \quad (١)$$

$$\text{جب ۞} + \text{جب ط} = \text{ء ل} + \text{ر ل} = \text{ءَ ل} + \text{ر ل} = \text{ءَ ر} \quad (٢)$$

مَ نقطه‌سی مرکز و (ب م) نصف قطریله ه ے قوسی رسم ء مَ ، ءَ مَ خطلری وصل، ق نقطه‌سنده قوس مرسومه ا ق اَ خط مماسی چیزلدکده

ء مَ ق زاویه‌سی یاخود ا ق قوسی ء ح قوسنك نصفی و ق مَ ق زاویه‌سی یاخود ق ق قوسی ح ب ءَ قوسنك نصفی اولدیغندن بو تقدیرجه

$$\text{ا ق} = \text{ظم قوس ا ق} = \text{ظم}\ \frac{١}{٢}(۞ - \text{ط}) \quad (٣)$$

اشبو استخراج اولنـان مهم دستور شو صورتله بيـان اولنور .

ايكى قوسك جيبلرى مجموعنك بينلرنده اولان فضله نسبتى قوسين مذكورينك نصف مجموعلرينك مماسنك نصف فضلنك مماسنه نسبتى كبى اولور.

**٤٢ — مم ه ± مم ط مثللو ايكى مماس مجموع ويا فضلنى حاصل ضربه تحويل ايتمك.** مساويلرى محلنه وضع ايله

$$\text{مم ه} + \text{مم ط} = \frac{\text{حس ه}}{\text{محس ه}} \pm \frac{\text{حس ط}}{\text{محس ط}} =$$

$$\frac{\text{حس ه محس ط} \pm \text{حس ط محس ه}}{\text{محس ه محس ط}}$$

---

$\bar{ب}\, \text{ق} = \text{مم ق ق} = \text{مم}\, \frac{١}{٢}\, (\text{ه} + \text{ط})\, (٤)$ اولور

$\bar{م}\, \text{ء}\, \bar{ء}$ ، ا $\bar{م}\, \bar{ب}$ مثلثلرنده

$\frac{\text{ء ر}}{\bar{ء}\, \bar{ر}} = \frac{\text{ا ق}}{\bar{ا}\, \bar{ق}}$ بالهندسه مثبت اولمغله ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ مساواتى محللرينه وضع ايله

$$\frac{\text{حس ه} - \text{حس ط}}{\text{حس ه} + \text{حس ط}} = \frac{\text{مم}\, \frac{١}{٢}\, (\text{ه} - \text{ط})}{\text{مم}\, \frac{١}{٢}\, (\text{ه} + \text{ط})}$$ اولوركه

فن مثلثاتده الك مهم دستورى حاصل ايدر.

$$\text{ياخود تم ه} \pm \text{تم ط} = \frac{\text{حس (ه} \pm \text{ط)}}{\text{تحس ه تحس ط}} \quad \text{اولور} \quad (۲۹)$$

$$\text{وعين وجهله بالتعيين عم ه} \pm \text{عم ط} = \frac{\text{حس (ط} \pm \text{ه)}}{\text{حس ه حس ط}}$$

(۳۰) دستوری دخی استخراج اولنور.

تنبیه. — اگر بر خط خط تماميسنه علاوةً بولنور ايسه طبق خط تمامیٔ مذکوری قیمتنی ارائه ايدن خط مستقيم ايله وضع ايدرك برجنسدن اولوب ایکی مثلثات خطی ایچون تعيين قلنان دستوره ارجاع ايديلور بو حالده $\text{حس ه} + \text{تحس ط}$ مقدارینی حاصل ضربه تحويل ایتمك ایچون افادهٔ مذکوره‌یی $\text{حس ه} + \text{حس} \left(\frac{\pi}{۲} - \text{ط}\right)$ طرزیله تحریر و (۲٤) دستورینه تطبیق ایتمك ایجاب ایدر:

$$\text{حس ه} + \text{تحس ط} = ۲ \ \text{حس} \left[\frac{۱}{۲} (\text{ط} - \text{ط}) + ٤٥^\circ\right] \text{تحس} \left[\frac{۱}{۲} (\text{ه} + \text{ط}) - ٤٥^\circ\right]$$

$$\text{وحس ه} - \text{تحس ط} = ۲ \ \text{تحس} \left[\frac{۷}{۲} (\text{ه} - \text{ط}) + ٤٥^\circ\right] \text{حس} \left[\frac{۱}{۲} (\text{ه} + \text{ط}) - ٤٥^\circ\right] \quad \text{حاصل اولورلر.}$$

## تطبيقات

(١) $٤٥^\circ$ $٣٠^\circ$ $٦٠^\circ$ $١٨^\circ$ $٧٢^\circ$ درجه‌لك قوسلرك جيب وتمام جيبلرينى بولمق.

(١) $٤٥^\circ$ درجه‌نك جيبى ضعف قوسنك نصف وترينه يعنى داخل دائره‌ده مرسوم مربع ضلعنك نصفنه مساوى اولمسيله

حس $٤٥^\circ$ = تحس $٤٥^\circ = \sqrt{\frac{١}{٢}}$ حساب اولنوب وبوندنخى

ظم $٤٥^\circ = ١$ الى آخره اولور .

(٢) $٣٠^\circ$ درجه‌نك جيبى $٦٠^\circ$ درجه‌لك قوسك وترينك نصفنه مساوى اولمسيله برابر $٣٠^\circ$ و $٦٠^\circ$ درجه‌لك قوسلر يكديكرينك تمامى بولندقلرندن بوصورتده

حس $٣٠^\circ$ = تحس $٦٠^\circ = \frac{١}{٢}$ و

تحس $٣٠^\circ$ = حس $٦٠^\circ = \sqrt{١ - \frac{١}{٤}} = \sqrt{\frac{٣}{٢}}$ اولور

ظم $٣٠^\circ$ = عم $٦٠^\circ = \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}\sqrt{٣}$ وهكذا اولور.

(٣) $١٨^\circ$لك قوسك جيبى داخل دائره‌ده مرسوم معشر منتظم ضلعنك نصفنه مساوى اولمسيله برابر $١٨^\circ$ و $٧٢^\circ$ درجه‌لك قوسلر يكديكرينك تمامى بولندقلرندن بوصورتده

حس $١٨^\circ$ = تحس $٧٢^\circ = \frac{\sqrt{٥} - ١}{٤}$ ،

تحس $١٨^\circ$ = حس $٧٢^\circ = \sqrt{١ - \frac{٦ - ٢\sqrt{٥}}{١٦}} =$

$\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ اولور.

۱٤، ۱٥، ۱۸، و ۱۹ دستورلری یاردمیله

حس $36^\circ$ = تجس $54^\circ$، تجس $36^\circ$ = حس $54^\circ$

حس $9^\circ$ = تجس $81^\circ$، تجس $9^\circ$ = حس $81^\circ$ حساب اولنور.

**(۲) $75^\circ$ لك قوسك مثلثات خطلرینی تعیین ایتمك.**

$75^\circ$ لك قوس $45^\circ$ ، $30^\circ$ درجه‌لك قوسلرك مجموعنه مساوی اولدیغندن حس $75^\circ$ = حس $(45 + 30)$ = حس $45^\circ$ تجس $30^\circ$ + حس $30^\circ$ تجس $45^\circ$ یاخود

حس $75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

وتجس $75^\circ$ = تجس $45^\circ$ تجس $30^\circ$ − حس $45^\circ$ حس $30^\circ$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ اولور.

یاخود تجس $75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

وكذا ظم $75^\circ = \frac{\text{حس } 75^\circ}{\text{تجس } 75^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}$

اولور.

وعم $75^\circ = 2 - \sqrt{3}$

وقم $75^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

وسم $75^\circ = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ اولور.

(٣) ه = ٩٠° و ط = ٠° اولديغنه كوره مم (ه — ط) دستورینی تحقیق ایتمك. دستور مذكور

مم (ه — ط) = (مم ه — مم ط) / (١ + مم ه مم ط) اولوب (مم ه) و (مم ط) ك قيمتلرى محلنه وضع اولندقده مم ٩٠° = ∞ / (١ + ∞ × ٠) دستورى بولنوب قيمتنك تعيينى غير ممكن اولور فقط تحقيق اولنان مذكور دستورك ايكى حدى مم ه ايله تقسيم اولنور ايسه اشبو صعوبت محو ايديلەرك بو صورتده

مم (ه — ط) = (١ — مم ط / مم ه) / (١ / مم ه + مم ط) اولوب (مم ه) و (مم ط) ك قيمتلرى محلنه وضع اولندقده

مم ٩٠° = (١ — ٠) / (٠ + ٠) = ١/٢ = ∞ اولور.

(٤) ب ، ح ، ى مثللو اوچ قوسك جيب ياخود مماسلرى معلوم ايكن مذكور قوسلرك مجموعنك جيب ومماسلرينى تعيين ايتمك

(١) حس (ب + ح + ى) = حس (ب + ح) محس ى + محس (ب + ح) حس ى اولوب حس (ب + ح) ومحس (ب + ح) تعبيرلرينك مساويلرى محلرينه وضع اولندقده

حس (ب + ح + ى) = حس ب محس ح محس ى + حس ح × محس ى محس ب + حس ى محس ب محس ح — حس ب حس ح × حس ى اولور.

(٢) وكذا مم (ب + ح + ء) =

مم (ب + ح) + مم ء / ١ — مم (ب + ح) مم ء مساويلری محلنه وضع ايله

مم (ب + ح + ء) =

مم ب + مم ح + مم ء — مم ب مم ح مم ء / ١ — مم ب مم ح — مم ح مم ء — مم ء مم ب

دستوری تحصيل اولنور.

اكر ب + ح + ء = ١٨٠° اولور ايسه بو صورتده مم ب + مم ح + مم ء = مم ب مم ح مم ء اولور.

(٥) (شكل ٣٨) م ب ح قطاع دائره‌سنك (م ح) نصف قطری اطرافنده دوريله تشكل ايدن حجم كره كندی كره‌سی حجمنك ربعی اولمق اوزره دائرهٔ مذكوره‌نك (م ح) و (م ب) نصف قطرلری بيننده واقع (ه) زاويه‌سنی تعيين ایتمك.



(شكل ٣٨)

قطاع مذكورك دوريله تشكل ايدن حجم قطاع كره (ع) ايله كوسترلدكده ع = ٢/٣ π ر٢ ح اولور.

لكن ح ياخود ح ء = ر — م ء = ر — ر جب ه = ر (١ — ه) اوله‌رق دستورده محلنه وضع اولندقده ع = ٢/٣ π ر٣ (١ — جب ه) اولوب لكن حجم مطلوب بر موجب مسئله كندی كره‌سی حجمنك يعنی (٤/٣ π ر٣) نك ربعی اوله‌جغندن بو حالده ٢/٣ π ر٣ (١ —

محس هـ) = $\frac{۱}{۲}$ π ر$^{۲}$ یاخود ۲ (ا ــ محس هـ) =

و ا ــ محس هـ = $\frac{۱}{۲}$ اولدیغندن (تطبیقات ۱ و ۲)

محس هـ = $\frac{۱}{۲}$ و هـ = ۶۰° اولور.

(٦) (شکل ۳۹) قاعدۀ علیاسی

(۸) وارتفاعی (٦) ذراع اعشاری

(شکل ۳۹)

وغیر موازی بولنان ضلعلرینك قاعدۀ سفلی ایله تشکیل ایتدکلری (هـ) زاویه‌سنك مماسی $\frac{۳}{٤}$ مقدارینه معادل اولان برشبه منحرف متساوی الساقینك مساحۀ سطحیه‌سنی حساب ایتمك مطلوبدر .

شبه منحرف مذکورك مساحۀ سطحیه‌سی س فرض اولندقده س = $\frac{۱}{۲}$ (م ب + ح د) ح اولوب بوموجب مسئله ح د = ۸ و ح = ٦ اولمغین (م ب) خطی د‌نحی ح د + ۲ ب ط مجموعنه مساوی بولنه‌رق بوصورتده

مم هـ = $\frac{\text{ح ط}}{\text{ب ط}}$ = $\frac{۳}{٤}$ یاخود ب ط = $\frac{\text{٤ ح ط}}{۳}$ = ۸ ،

م ب = ۲٤ اولمسیله س = $\frac{۱}{۲}$ (۲٤ + ح د) ۸ = ۹٦ ذراع اعشاری مربعی اولور .

(۷) س = ب ± ح تعبیر جبریسنك لغارتمه ایله حساب اولنه‌جق برصورتده ارجاعی مطلوبدر .

اول امرده س = ب (۱ ± $\frac{\text{ح}}{\text{ب}}$) شکلنه وضع اولندقدن صکره $\frac{\text{ح}}{\text{ب}}$ مقداری برمتوسط زاویه‌نك جیبی یاخود تمام جیبی

یاخود مماسیله ویا اشبو خطلرك مربعلریله ارائه اولنه‌بیلور.

اولا س = (ب + ح) فرضیله (ب) معترضه‌سنه الندقده س = ب (١ + ح/ب) اولوب قیمتی لغارتمه ایله بالسهوله حساب اولنه‌بیلان (ه) متوسط زاویه اولمق اوزره ح/ب = مم² ه وضع اولندقده س = ب (١ + مم² ه) یاخود س = ب قع² ه = ب/تجب² ه اولوب لغارتمه ایله حساب اولنه‌بیله‌جك برصورته ارجاع اولنمش اولور.

(٢) س = ب − ح ، ب > ح فرضیله ح/ب مقداری واحددن كوچك اولدیغندن جب² ه یاخود تجب² ه ایله ارائه اولندقده س = ب(١ − جب² ه) = ب تجب² ه یاخود

س = ب (١ − تجب² ه) = ب جب² ه اولور

واكر ح > ب اوله‌جق اولور ایسه بوصورتده س = − ح جب² ه اولور.

(٣) ح > ب ، ح/ب = تجب ه فرضیله س = ب (١ ± تجب ه) اولوب حالبوكه ١ + تجب ه ، ١ − تجب ه حدلری (ماده ٣٨) بربرینی متعاقب ٢ تجب² ه/٢ و٢ جب² ه/٢ قیمتلرینه مساوی اولدقلرندن بوصورتده س = ب + ح = ٢ ب تجب² ه/٢ ، س = ب − ح = ٢ ب جب² ه/٢ اولور.

(٤) اصول عمومی . ب ، ح حدلرینك قیمت اضافیه‌لری هرنه مقدار اولور ایسه اولسون ح/ب = مم ه فرضیله س = ب (١ ± مم ه) اشبو تعبیر ٤٢ ماده‌سنه تطبیقاً حل اولندقده

س = ب √٢ حس (٤٥° ± ه) / مجس ه اولور .

تنبيه س = (ب − ج) / (ب + ج) تعبيريدخی لغارتمه ايله حساب اولنه‌جق صورته ارجاع اولنه‌بيلور ايسه‌ده فقط كسر مذكورك ايكی حدينی‌ده (ب) معترضه‌سنه آلدقدنصكره معترضه درونده تشكل ايدن ج/ب كسرينی ظم ه يعنی ج/ب = ظم ه ايله وضع ايديلوب و ظم ٤٥° = ١ اولديغندن

س = (١ − ظم ه) / (١ + ظم ه) = (ظم ٤٥° − ظم ه) / (١ + ظم ٤٥° ظم ه) =

ظم (٤٥° − ه) اولور .

(٨) م حس ب ± ن مجس ب تعبير جبريسنك لغارتمه ايله حل اولنه‌جق برصورته ارجاعی. تعبير مذكور ى حس س + ى مجس س = ل معادله‌سی شكلنه قونيله‌بيلور.

(١) (م) معترضه‌سنه اخذ ايله

م حس ب ± ن مجس ب =

م (حس ب ± ن/م مجس ب) اولوب ن/م = ظم ه فرضيله

م حس ب ± ن مجس ب = م (حس ب ± ظم ه مجس ب)

= م حس ب ± (حس ه مجس ب / مجس ه)

= م ((حس ب مجس ه ± حس ه مجس ب) / مجس ه)

= م حس (ب ± ه) / مجس ه اولور.

(٢) طرفين معادله (ق) ايله تقسيم اولندقده

حس س + ك/ق تحس س = ل/ق اولوب ك/ق

= مم ه فرض اولندقده

حس س + مم ه تحس س = ل/ق طرفين معادله تحس ه ايله ضرب اولندقده

حس س تحس ه + مم ه تحس س تحس ه = ل/ق × تحس ه

اولوب لكن مم (حس ه / تحس ه) اولمغله محلنه وضع ايله

حس س تحس ه + حس ه تحس س = ل/ق تحس ه ياخود

حس (س + ه) = ل/ق تحس ه اولور .

اوچنجی فصل اوزرینه اولان تطبيقاتك يدنجی مسئله‌سنده كوريله‌جكی اوزره اولا (س + ه) وبعد (س) زاويه‌لری تحصيل اولنور.

(١٠) س < π اولمق اوزره حس س تحس^٢ س حاصل ضربنده (س) زاويه‌سنك اعظمی قيمتی مطلوبدر.

تحس س محلنه مساويسی اولان √(١ — حس^٢ س) وضع اولندقده حس س (√(١ — حس^٢ س))^٢ اولوب اشبو حاصل ضربك اعظميتی تربيع ايله حصوله كلان حس^٢ س × (١ — حس^٢ س)^٢ تعبيرندن تحصيل اولنه‌جغی حس^٢ س و ١ — حس^٢ س حدينی مجموعی ثابت وواحدده مساوی اولديغنـدن استدلال اولنور.

بو صورتده حاصل ضرب مذكورك اعظمى اولمسى حدينك قوتلريله متناسب اولمسنه محتاج اولمغله نسبت تنظيم اولندقده

$$\frac{\text{حس}^{٢}\ \text{س}}{١ - \text{حس}^{٢}\ \text{س}} = \frac{١}{٣}$$ ويا $\text{حس}^{٢}\ \text{س} = \frac{١}{٤}$ وياخود $\text{حس}\ \text{س} = \frac{١}{٢}$ و $\text{س} = ٣٠^{\circ}$ اولور .

## اوچنجی فصل

### ( مثلثات جدوللری )

### { باب اول }

۴۳ ، ــ مثلثات تطبیقاتنده اعطا اولنان قوسك راجع اولدیغی مثلثات خطلرینی ویااشبو خطلره متعلق قوسلری طانیمق لازم اولوب کفایت درجه ده متقارب فاصله ایله بر برینی تعاقب ایدن قوسلو ایچون خطوط مذکوره نك قیمتلرینی بیلدیرن جدوللر بوسببه مبنی انشا اولنمشدر .

بر اصول اساسیه یاردمیله بومثللو جدوللر انشا اولنه بیله جکی بیان اولنه جقدر .

مثلثات خطلری اخذی ممکن اولان قیمت مطلقه لرینی برنجی ربع دائره ده اخذ ایلدکلرندن قیم مذکوره یی برنجی ربعده حساب ایتمك کافی اولدیغی کبی الك بیوك قوسلر تماملری اوله رق (۰) الی (۴۵) درجه یه قدر اولان قوسلرك جیبلری (۴۵) درجه دن (۹۰) درجه یه قدر اولان قوسلرك تمام جیبلرینه مساوی اولدیغندن یالکز ۴۵ درجه یه قدر اولان قوسلرك خطوط مثلثاتیه سنك تعیینی دخی کافیدر .

الحاصل مثلثات خطلرندن بری معلوم اولدقجه مثلا جیب معلوم بولندقجه سائرلری بولنه بیلور .

امدی بو حالده برقوسك برنجی ربعده جیبنی حساب ایتمك کافی اولدیغندن ۱۰ ثانیه‌لك قوسـك جیبنی استخراج ایتمك لازمدر. بوندن حاصل اوله‌جق نتائجك قیمت تخمنه‌لریدخی آتی‌الذکر دعاویٔ اساسیه ایله تقدیر اولنمق ممکندر .

**٤٤ دعوی ۱ — طقسانه درجه‌دن کوچك اولان قوس جیبندن اعظم ومماسندن اصغر اولرق واقع اولور.**

(شکل ٤٠) قوس ح ب = ه فرضیله ح حَ وتری م ب خطنه عموداً رسم ، ح ط مماسی دخی رسم اولندقده اصول هندسه‌ده بیان اولندیغی اوزره ح ط = حَ ط = مم ه اولوب ح حَ = ۲ ح ء = ۲ حس ه اولور.

فقط ح حَ < قوس ح ب حَ < ح ط حَ (شکل ٤٠)

یاخود ۲ حس ه < ۲ ه < ۲ مم ه

بوصورتده حس ه < ه < مم ه اولور .

نتیجه — زیاده کوچوك برقوس کندی جیبندن پك جزئی فرق ایدر .

(یعنی الك اصغر برقوسك جیبی قوس مذکور طولنه همان مساویدر) .

بوصورتده سبقت ایدن غیر مساوات دستورنده اوچ مقدار بر (حس ه) ایله تقسیم اولندقده ۱ > ه / حس ه > ۱ / تجس ه

حاصل اولوب امدی (ه) قوسنك تناقص ایتمسنه وصفره منجر اولمسنه كوره تمام جیب تزاید وواحده مساوی اولور بو حالده

١/تحس ه نسبتی همان واحده تقرب ایدوب

و ه/حس ه نسبتی كذلك واحده یاقلاشور سائر حدلرده یك كوچوك برقوس وانك جیبی بربرلرندن پك آز فرق ایدرلر امدی قوس مذكور متقارب قیمتك اخذنده ایدیلان خطا تجویز اولنور وزیرده‌كی دعوا واسطه‌سیله ایدیلان خطانك حدی حساب وتعیین قلنور .

**٤٥ دعوی ٢ — برنجی ربع داخلنده برقوس ایله جیبی بینده‌كی فرق قوس مذكور مكعبنك ربعنده اقل اولور.**

فی الحقیقه ﻣ ١/٢ ه < ١/٢ ه یاخود (حس ١/٢ ه)/(تحس ١/٢ ه) < ١/٢ ه اولوب اشبو غیر مساواتك طرفینی ٢ تحس٢ ١/٢ ه ایله ضرب اولندقده ٢ حس ١/٢ ه تحس ١/٢ ه < ه تحس٢ ١/٢ ه یاخود حس ه < تحس٢ ١/٢ ه ویاخود

حس ه < ه (١ — حس٢ ١/٢ ه) اولور . اكر حس ١/٢ ه محلنه ١/٢ ه وضع اولنور ایسه مقداری الك اعظمی اولوب غیر مساوات كسب متانت ایدر وبو حالده

حس ه < ه (١ — ه٢/٤) یاخود حس ه < ه —

$\frac{\text{ة}^{٣}}{٣}$ و ة — حس ة < $\frac{\text{ة}^{٣}}{٤}$ اولوب بوصورتده پك كوچوك بر قوسك جيبى يرينه قوس مذكور قبول اولنور ايسه خطا $\frac{\text{ة}^{٣}}{٤}$ مقدارندن اصغر اوله‌جغى تبين ايدوب مطلوب ثابت اولور.

تنبيه — كرك بو وكرك كچن دعوالردن اكلاشلديغنه كوره حس ة، ة ايله ة — $\frac{\text{ة}^{٣}}{٤}$ بيننده بولنوب بوصورتده ة > حس ة > $\frac{\text{ة}^{٣}}{٤}$ اولور.

**٤٦ نتيجه** — برنجى ربع داخلنده بر قوسك تمام جيبى ١ — $\frac{\text{ة}^{٢}}{٢}$ ايله ١ — $\frac{\text{ة}^{٢}}{٢}$ + $\frac{\text{ة}^{٤}}{١٦}$ بيننده بولنور.

بوصورتده حس $\frac{١}{٢}$ ة نك قيمتى $\frac{\text{ة}}{٢}$ ايله $\frac{\text{ة}}{٢}$ مقدارينك مكعبنك ربعيله تناقص ايدن يعنى $\frac{\text{ة}^{٣}}{٣٢}$ بيننده بولنور اكر تحس ة = ١ — ٢ حس$^{٢}$ $\frac{١}{٢}$ ة دستورنده حس $\frac{١}{٢}$ ة قيمتى $\frac{\text{ة}}{٢}$ مقدار اعظميسيله وضع اولنور ايسه معادله‌نك حد ثانيسى تناقص ايدوب دستور مذكور شو تحس ة > ١ — ٢ $\left(\frac{\text{ة}}{٢}\right)^{٢}$ ياخود تحس ة > ١ — $\frac{\text{ة}^{٢}}{٢}$ هيئته منجر اولور.

وبالعكس اكر حس $\frac{١}{٢}$ ة حدى $\frac{\text{ة}}{٢}$ — $\frac{\text{ة}^{٣}}{٣٢}$ مقدار اصغريسيله وضع اولنور ايسه معادله‌نك حد ثانيسى تزايد ايدوب مذكور دستور شو

تحس ة < ١ — ٢ $\left(\frac{\text{ة}}{٢} - \frac{\text{ة}^{٣}}{٣٢}\right)^{٢}$ وياخود

جس ه $> ١ - \frac{ه^{٢}}{٢} + \frac{ه^{٤}}{١٦} - \frac{ه^{٦}}{٢(٣٢)^{٢}}$ اولور.

واكر غيرمساواتك طرف ثانيسى $\frac{ه^{٦}}{٢(٣٢)^{٢}}$ ايله تزايد ايتديريلور يعنى حد مذكوردن صرف نظر اولنور ايسه غير مساوات كسب متانت ايدوب اولحالده جس ه $> ١ - \frac{ه^{٢}}{٢} + \frac{ه^{٤}}{١٦}$ اولور.

جس ه، $١ - \frac{ه^{٢}}{٢}$ ايله $١ - \frac{ه^{٢}}{٢} + \frac{ه^{٤}}{١٦}$ اولور.

بوصورتده جس ه، $١ - \frac{ه^{٢}}{٢}$ ايله $١ - \frac{ه^{١}}{٢} + \frac{ه^{٤}}{١٦}$ بيننده بولنه‌رق $١ - \frac{ه^{٢}}{٢} <$ جس ه $< ١ - \frac{ه^{٢}}{٢} + \frac{ه^{٤}}{١٦}$ صورتيله افاده اولنور.

بو حالده پك كوچك اولان بر قوسك تمام جيبى ايچون $١ - \frac{ه^{٢}}{٢}$ مقدارى قبول اولنور ايسه ظهور ايده‌جك خطا $\frac{ه^{٤}}{١٦}$ دن اقل اولور.

## ٤٧ — حس $″١$ وجس $″١$ قيمتلريني حساب ايتمك .

$١٨٠^{\circ}$ درجه‌لك قوس $\pi$ ديمك اولديغندن ثانيه‌يه بالتحويل $١٨٠ \times ٦٠ \times ٦٠ = ٦٤٨٠٠٠$ ثانيه اولور.

امدى قوس $″١ = \frac{\pi}{٦٤٨٠٠٠}$ اولوب اشبو كسردن چيقاجق خارج قسمت ٠,٠٠٠٠٥ كسرندن اصغر اولور.

اكر حس $″١$ ايچون مقدار مذكور اخذ ايديله‌جك اولور

ایسه ظهور ایده‌جك خطا $\frac{(0,00005)^3}{4}$ یعنی $\frac{0,000000000000125}{4}$ مقدارندن کوچك اولوب حاصل اوله‌جق خارج قسمتی هیچ اولماز ایسه (١٣) مرتبه کسر اعشاری خانه‌سنه دکین صحیح اولورکه قیمت مذکوره شوندن ٠,٠٠٠٠٤٨٤٨١٣٦٨١ عبارت بولنور .

واکر تحس $1'' = 1 - \frac{(\text{قوس } 1'')^2}{4}$ النه‌جق اولور ایسه ظهور ایده‌جك خطا $\frac{(0,00005)^4}{16}$ یعنی $\frac{0,00000000000000000625}{16}$ مقدارندن کوچك اولور .

بوصورتده تحصیل اولنه‌جق قیمت تقریبیه هیچ اولماز ایسه اون سکز مرتبه کسر اعشاری خانه‌سنه دکین صحیح اولورکه قیمت مذکوره شوندن ٠,٩٩٩٩٩٩٩٩٩٩٨٨٢٤٨ عبارت بولنور.

بوحالده حس $1''$ = طول قوس $1''$ =

$= 0,00000484813681$ وتحس $1''$ =

$1 - \frac{(\text{طول قوس } 1'')^2}{2} = 0,999999999988248$ اولورلر.

**٤٨ — اون ثانیه‌لك قوسلرك جیب و تمام جیبلری**

متعاقباً حس ه وتحس ه . . . . . الخ

دستورلرینك یاردمیله حساب ایدیله بیلوب لکن (صامپسونه) دستورلری واسطه‌سیله بك ساده صورتده حساب اجرا ایدیلور.

حس (ه + ط) + حس (ه — ط) =

٢ حس ه تحس ط

تحس (ه + ط) + تحس (ه — ط) =

٢ تحس ه تحس ط دستورلرندن

حس (ه + ط) = حس ه × ٢ تحس ط —

حس (ه — ط)

تحس (ه + ط) = تحس ه × ٢ تحس ط —

تحس (ه — ط) = تحس ه × ٢ تحس ط —

تحس (ه — ط) دستورلری تحصيل اولنوب

ه = م ط فرض ومحلنه وضع اولندقده

حس (م + ١) ط = حس م ط × ٢ تحس ط —

حس (م — ١) ط ، و

تحس (م + ١) ط = تحس م ط × ٢ تحس ط —

تحس (م — ١) ط اولمغله

ط = ١٠ً ومتعاقباً م = ١ و م = ٢ و م =

٣ . . . . الخ فرض اولندقلرنده

حس ٢٠ً = حس ١٠ً × ٢ تحس ١٠ً — ٠

تحس ٢٠ً = تحس ١٠ً × ٢ تحس ١٠ً — ١

حس ٣٠ً = حس ٢٠ً × ٢ تحس ١٠ً — حس ١٠ً

تحس ٣٠ً = تحس ٢٠ً × ٢ تحس ١٠ً — تحس ١٠ً

حس ٤٠ً = حس ٣٠ً × ٢ تحس ١٠ً — حس ٢٠ً

تحس ٤٠ً = تحس ٣٠ً × ٢ تحس ١٠ً — تحس ٢٠ً

حس ٥٠ً = حس ٤٠ً × ٢ تحس ١٠ً — حس ٣٠ً

تحس ٥٠ً = تحس ٤٠ً × ٢ تحس ١٠ً — تحس ٣٠ً

اوتوز درجه‌دن بدأ ایله عمل مذکور قابل تحسین بروجهله ساده‌لشه‌بیلور.

حس (ه+ط) + حس (ه—ط) = ٢ حس ه تحس ط

تحس (ه+ط) — تحس (ه—ط) = ٢ حس ه حس ط

دستورلری تحریر وانلردن

حس (ه + ط) = ٢ حس ه تحس ط —
حس (ه — ط)

تحس (ه + ط) = تحس (ه — ط) —
٢ حس ه حس ط صورتلری اخراج اولنـدقدن صکره ه = ٣٠° فرضیله حس ٣٠° = ١/٢ اولدیغندن استخراج اولنان صورتلرده محلنه وضع اولندقده

حس (٣٠° + ط) = تحس ط — حس (٣٠° — ط)

تحس (٣٠° + ط) = تحس (٣٠° — ط) — حس ط اولوب

( ط ) مقداری اوتوز درجه‌دن کوچك اولدیغی حالده کافه‌سی طرف ثانیدن تحصیل اولنوب ساده برطرح ایله اوتوز درجه‌دن زیاده اولان قوسلرك جیبلری وتمام جیبلری تعیین اولنور.

تنبیه ١ — جیبلری وتمام جیبلری حساب ایتمك ایچون بروجه بالا ماده‌یه تطبیق ایدیله‌جك اولور ایسه قیمت عددیه‌لرك تحقیقنه احتیاج مس ایدر زیرا عملیات اثناسنده ظهوره کلان برخطا بوندن صکره ایدیله‌جك حسابلرك کافه‌سنی نقصان قیلمغه

باعث اولور بوندن فضله حس ′′۱ وبحس ′′۱۰ نك قيمتلری يالكز متقارب اولەرق واقع اولوب خطالر حساباتك ايلرولمسيله آرتوب مكمليت كسب ايدر بو صورت غير مناسبەيی تصحيح ايتمك ايچون تحصيل اولنان نتايج (قيمتلر) ك تحقيقنده انتخاب اولنمش مناسب قوسلرك صحيح بر عددينك جيبلرينی وتمام جيبلرينی طوغريجه تعيننده دقت ايتمك ايجاب ايدر . هنوز بوسؤال ايكنجی فصلك برنجی تطبيقنده حل اولنمشدر (ماده ٣٨) دستورلرينك ياردميله ′′۹ دن ′′۹ يه يعنی طقوز درجەلك قوسلرك جيبلری وتمام جيبلری تحصيل اولنوب صامپسون دستورلريله حصوله كتوريلان عملياتك ترتيب جديدينك حركت نقطەسی مثللو تقارب كافيه ايله طوغريجه حساب اولنمش اشبو قيمتلر دخی آلنەبيلور .

تنبيه ٢ — بعض اجرا آت خصوصيه مثلثات تابعلرينك قيم طبيعيەسنی حاوی اولور فقط تطبيقاتك اكثريسنده حسابلر لغارتمەلر واسطەسيله اجرا اولندقلرندن بو سببله مستعمل جدوللر يالكز قيم طبيعيەنك لغارتمەلرينی اعطا ايتملريله جدوللر داخلنه حس . بحس . تم . تمم . مثللو درت تابعك فقط لغارتمەلری تحرير اولنمشدر .

اكر قاطع وتمام قاطعك لغارتمەلرينه احتياج مس ايدر ايسه تمام جيب وجيبك لغارتمەلرينی اشارت معكوسەلريله اخذ ايتمك كافيدر چونكه بونلرك مثلثات خطلری ديكر ايكيسنك عكسی ترتيبلرينه مساويدر .

## باب ثانى

### (مثلثات تابعلرينك لغارتمه جدوللرى)

### {جدوللرك ترتيب واستعمالى}

**٤٩** — مثلثات جدوللرى ايكى نوع اولوب برنجيسى (قاله) و(دوپوى) . . . . . مثللو ذاتلرك ترتيب ايتمش اولدقلرى بيوك جدوللردركه يدى مرتبه كسر اعشارى خانه‌سيله برابر صفردن طقسان درجه‌يه دكين اون ثانيه‌لك قوسلرك مثلثات خطلرينك لغارتمه‌لرينى وصفردن بش درجه‌يه قدر برر ثانيه متزايد قوسلرك لغارتمه‌لرينى حاوى بولنور .

ايكنجيسى موسيو (لالاند) ك كوچك جدوللريدركه دقيقه‌دن دقيقه‌يه آرتان قوسلرك مثلثات خطلرينك لغارتمه‌لرينى حاويدر بو نهايتكى‌لردن بعضيلرى يدى خانه كسر اعشارى مرتبه‌سنده ترتيب اولنمشلردر اشبو جدوللرك كافه‌سنك ترتيبى عين حالده اولديغندن يالكز موسيو (لالاند) ك جدوللرينك ترتيبنى بيان ايتمك كافيدر .

قوسك درجه‌لرينك عددى هر ستونك نامنه مضافدر (٠) دن ٤٥° درجه‌يه قدر صحيفه‌نك بالاسنه واشبو درجه‌لره نسبتى

اقتضا ایدن دقیقه‌لر صولده (ترکجه‌سنده صاغده) کی برنجی ستونه یازلمشدر .

سائر ستونلر هر بری اسم مخصوصلریله جب مماس تمام مماس جب مثللو مثلثات تناسبلرینك لغارتمه‌لرینی حاویدر وبونلرك قرائتی ایسه یوقارودن اشاغی‌یه اجرا اولنور وینه بویله‌جه ۴۵° دن ۹۰° درجه‌یه قدر عین ترتیب اوزره عکس جهته طوغری کیدر وقرائتی ایسه اشاغیدن یوقاریه اجرا اولنور بوحالده درجه‌لر صحیفه‌نك زیرینه ودقیقه‌لر صاغ طرف (ترکجه‌سنده صول طرفده) کی برنجی ستونه تحریر اولنمشدر اشبو جهت معکوسه‌ده جب ستونی جب ستوننه وعلی‌الخصوص مماس ستونی تمام مماس ستوننه . . . الخ تحول ایلمشدر بلاصعوبت بیلینورکه ۴۵° درجه‌دن بیوك اولان برقوسك تمامیسی طبیعی کندوسندن اصغر اوله‌جغی کبی مقابلی قوسلرده دخی عین حال ظهوره کلور.

**۵۰** — هر ایکی قوس متوالینك جیبلرینك لغارتمه‌لری بیننده اولان فضللر جدول تفاضلی ستونی تشکیل ایدوب مذکور فضللر یاردمیله متوسط لغارتمه‌لر حساب اولنور وینه اصول مذکور مماس . . . الخ ایچون دخی عین وجهله جاریدر.

تفاضل مذکوره جیب ومماسلر ایچون مثبتدر چونکه اشبو تابعلر قوس ایله تزاید ایدر.

حالبوکه تمام جیب وتمام مماسلر ایچون منفی اولور چونکه اشبو تابعلر قوسك تزایدیله تناقص بولور.

بوندن فضله ( دوپوی ) و ( هوئل ) نام ذاتلرك جدوللری اقسام متناسبه جدوللرینی حاوی اولدیغندن (لالاند)ك جدوللریله اجراسی اقتضا ایدن بعض لازملی حساباته احتیاج قالماز.

کذلك مذکور تفاضل ستونی مماس وتمام مماسی دخی شامل اولور زیرا بو خطلر معکوس اولدقلری حالده ه ، ط مثللو ایکی قوس متوالیده مم ه × تمم ه = مم ط تمم ط یاخود

مم ه / مم ط = تمم ط / تمم ه اولوب لغارتمه‌یه تطبیق ایله

لع مم ه — لع مم ط = لع تمم ط — لع تمم ه اولور.

ایکی قوسك مماسلرینك لغارتمه‌لری بیننده اولان فضل قوسین مذکورین جیب لغارتمه‌لری فضللریله تمام جیب لغارتمه‌لرینك فضللری مجموعندن عبارت بولنور. زیرا

مم ه = حس ه / تحس ه ، مم ط = حس ط / تحس ط اولوب بر بری اوزرینه

تقسیم اولندقلرنده مم ه / مم ط = حس ه تحس ط / تحس ه حس ط

لغارتمه‌یه تطبیق اولندقده

لع مم ه — لع مم ط = لع حس ه — لع حس ط +
لع تحس ط — لع تحس ه اولور .

تنبیه ۱ — جدوللرك رؤیتنه کلنجه (۹۰°) یه قریب قوسلرك تمام جیبلری ایچون جدول تفاضلیلر غایت اصغردر شویله که

تمام جیبك لغارتمه‌سی اوزرینــه قیمتك جزئی بر تحولی یاخود خفیف بر خطاسی بالعکس قوس اوزرینه کلیتلی تبدل حاصل ایدر بو کیفیت پك کوچك قوسلرك جیبلرینه دخی تطبیق اولنه. بیلور بو وجهله زیاده کوچك بر قوســك جیبی نقصان تحصیل اولنوب وطقســان درجه‌یه قریب بر قوسك تمام جیبی کذلك مکملاً تعیین اولنه‌مز فقط اشبو خطالر مماسلرده وقوعبولمز.

تنبیه ۲ — بالجمله قوسلرك جیب وتمام جیبلری واحددن کوچك اولوب وبویله‌جه قرق بش درجه‌دن کوچك قوسلرك مماسلری و °٤٥ ایله °٩٠ بیننده اولان قوسلرك تمام مماسلری کذا واحددن اصغر اوله‌رق بولنمسیله کافه‌ســنك مثلثات خطلرینك لغــارتمه‌لری منفیاً واقع اولور امدی بعض جــدوللرده منفی مرفوعلردن اجتناباً لغارتمه‌لری (۱۰) ایله تزیید یعنی مرفوعی منفی لغارتمه‌لره (۱۰) ضم اولنمشدر فقط عملیات حسابیه‌ده اشبو ضم فائده‌سز اولمغله ینه بومثللو لغارتمه‌یی اصل صحیحنه ارجاع ایتمك اولادر.

**۵۱** . — حساباتك صحتی نظر مطالعــه‌یه النقده کسر اعشاری مرتبه‌سی یدی خانه اولان جدوللر دها زیاده محسناتلیدر مثلا بر مثلثك زاویه‌لرینی اثنای حسابده ظهور ایده‌جك مجموع خطا ۲,۰ ثانیه قدر اولمز حالبوکه کسر اعشاری مرتبه‌سی بش خانه‌لی اولان جدوللر ایله خطانك مقداری (۱۸) ثانیه‌یه قدر تزاید ایدر کوچك وبیوك جــدوللرك استعماللرینــه کلنجه

ایکیسنکده نتیجه‌لری بر اوله‌رق ظهور ایدر ایسه‌ده فقط کوچك جدوللرك استعمالی صعوبتلیدر (دوپوی) نام ذاتك ترتیب ایتمش اولدیغی جدوللر متناسب قسملری دخی حاوی اولدیغندن استعمالی کثیر وفائده‌دن غیر حالیدر تطبیقاته کلنجه کسر اعشاری مرتبه‌سی بش خانه‌لی اولان جدوللر دائما قیمت تقریبیهٔ کافیه اعطا ایتدیکندن حساباتی پك سرعتلی اجرا اولنور فن مساحه وحکمت وجر اثقال مسئله‌لرنده وکذا (٤) یاخود (٥) حد ایله معین معلوماتی حاوی مسئله‌لرده اشبو ذکر اولنان جدوللری ترجیح ایتمك اقتضا ایدر. (ره‌نه) و (بورژه) نامان ذاتلرك جدوللری دها فائده‌لی صورتده استعمال اولنه‌بیلوب جدوللری زیاده قوللانلشلی بر حاله کتورن حاشیه‌لرندن ماعدا قرائته زیاده الیق یعنی اوقونشلی وتحریاتی غایت سهولتلی اولمق اوزره ترتیباتی حاویدر.

**۵۲** — جدوللرك قنغیسی استعمال اولنور ایسه اولنسون بروجه آتی ایکی مسئله‌نك اصول حلنی بیلمك لازمدر.

(۱) اعطا اولنمش برقوس معلومك منسوب اولدیغی مثلثات خطنی بولمق.

(۲) لغارتمه‌سی معلوم بر مثلثات خطنك راجع اولدیغی الك کوچك قوسنی بولمق مسئله‌لرندن عبارت اولوب اصول حلك کیدیشاتنی بیلدیرمك ایچون کسر اعشاری مرتبه‌سی یدی خانه‌لی

اولان ( لالاند ) ك جدوللريله مسائل مذكوره‌يى حل ايتمك كافيدر .

**مسئله ۱ — اعطا اولنانه برقوس معلومك منسوب اولديغى مثلثات خطنك لغارتمه‌سنى بولمق .**

اكر قوس مذكور (۹۰°) دن اعظم اولور ايسه (ماده ۲۳) اولا برنجى ربع دائره‌يه ارجاع ايتمك ايجاب ايدر قوس مذكور (۹۰°) دن كوچك فرضيله

(۱) مثلا حس ۲۹° ۱۷َ ٤۷ً نك لغارتمه‌سنى بولمق مطلوب اولسه بو حالده قوس (٤٥°) دن كوچك اولمغله شمدى درجه‌يى جدوللرك صحيفه‌لرينك بالاسنده ارامق ايجاب ايدوب بالاى صحيفه‌ده (۲۹°) بولنديغى كبى صحيفهٔ مذكوره‌نك صولدن (صاغدن) برنجى ستوننك (۱۷َ) يازيلان رقمه قدر تعقيب ايدوب اشبو (۱۷َ) دقيقه حذاسنده برجيب ستوننده يازيلى حس ۲۹° ۱۷َ نك لغارتمه‌سى اولان ۱,٦۸۹٤۲۳۲َ عددى اخذ ايديلور بعده لغارتمهٔ مذكوره ايله قوسك ٦۰ً تزايد ايدن لغارتمهٔ علياسى بيننده اولان و او خذاده جدول تفاضل داخلنده بولنان ۲۲٥۲ عدد تفاضليسى اخذ اولنه‌رق بوحالده مأخوذ لغارتمه يدى خانه كسر اعشارى مرتبه‌سنده ۲۲٥۲ عددى قدر تزييد ايتديريلور اشبو ايكى جهتله اولان تزايد يكديكريله همان متناسب كبى عد وقبول اولنمسيله جدولده بولنان لغارتمه ۲۲٥۲ عدد تفاضليسنك $\frac{٤۷}{٦۰}$ مثلنده ياخود انلرك حاصلى اولان ۱۷٦٤ واحد متزايدى

يدی خانه کسر اعشاری مرتبه‌سنده تزييد ايديلوب ارانيلان لغارتمهٔ مطلوبه ١,٦٧٩٥٩٩٦َ عـددندن عبارت اولورکه اصول حسابی بروجه آتی کوسترلمشدر.

$$\text{لع حس } ١٧َ \; ٢٩^\circ = ١,٦٨٩٤٢٣٢َ$$

$$\text{لع } ٤٧ً = ١٧١٤$$

$$\text{لع حس } ٤٧ً \; ١٧َ \; ٢٩^\circ = ١,٦٨٩٠٩٩٦َ$$

$$\frac{٤٧ \times ٢٢٥٢}{٠٦} = ١٧٦٤$$

(دوپوی) نك اقسام متناسبـه علاوه‌لی جدوللری بروجه بالا اجرا اولنان ضرب وتقسيم کلفتلرينی اقتضا ايتـديرميوب اشته مذکور جدوللر واسطه‌سيله بروجه آتی حساب اولنور .

$$\text{لع } ٤٠ً \; ١٧َ \; ٢٩^\circ = ١,٦٨٩٠٧٣٣َ \text{ فضل } ٢٧٦$$

$$٧ً = ٢٦٣$$

$$\text{لع } ٤٧ً \; ١٧َ \; ٢٩^\circ = ١,٦٨٩٠٩٩٦َ \text{ اولمش اولور.}$$

(٢) حس ٢٢,٥ً ٢٩َ ٥٤° نك لغارتمه‌سنی بولمق مطلوب اولسه اشبو درجه‌نك منسوب اولدیغی قوس (٤٥°) دن اعظم اولمسيله بو حالده عدد درجه‌يی صحيفه‌لرك زيرنده ارامق ايجاب ايدر (٥٤°) بولنديغی صحيفـه‌نك صاغدن (صولدن) برنجی ستوننـده محرر (٢٩َ) دقيقه‌سنه دکين واريلوب اشبو خذاده تمام جيب جدولندن ٢٩َ ٥٤° نك تمام جيبنك لغارتمه‌سی اولان ١,٧٦٤١٣١١َ عـددی وجدول تفاضليدن ١٧٧١ عددی اخذ اولنور سابق مسئله‌ده

اولدیغی مثللو قوسك ″٦ تزایدیله یدی خانه کسر اعشاری مرتبه‌سی ١٧٧١ واحدی قدر لغارتماسندن تناقص ایده‌جکندن بو حالده ″٢٢,٥ قدر تزاید ایدن قوس لغارتمه جهتندن ١٧٧١ عددینك $\frac{٢٢,٥}{٦٠}$ مثلنجه تناقص ایده‌جکی جهتله ارانیلان لغارتمهٔ مطلوبه ′١,٧٦٠٦٤٧ عددندن عبارت بولندیغی بروجه آتی اصول ایله حساب اولنور.

لع محس ٥٤° ٢٩′ = ′١,٧٦٤١٣١١

″٢٢٥ = —٦٦٤

لع محس ٥٤° ٢٩′ ″٢٢,٥ = ′١,٧٦٤٠٦٤٧

$-\frac{٢٢٥ \times ١٧٧١}{٦٠} = -$ ٦٦٤ اولور.

**مسئله ٢ — اعظا اولنمش برلغارتمه‌نك شامل اولدیغی اك کوجك قوسی بولمق.**

(١) مطلوب اولان قوس (ه) حرفیله کوسترلدکده

لع مم ه = ′١,٨٧٥٤٣٢٨ فرضیله

مماس ستوننده لغارتمهٔ معطیه‌یه اقرب اولان ′١,٨٧٥٢٧٣٤ لغارتمه‌سی بولنوب لغارتمهٔ مذکورك ارائه ایلدیکی ٥٣′ ٣٦° قوسی النوب یدی خانه کسر اعشاری مرتبه‌سنده اولان ٢٦٣١ عدد متزایدی تفاضل جدولندن الندقدنصکره لغارتمهٔ معلومه ایله اشبو لغارتمهٔ متقاربه بیننده اولان ١٥٩٤ فضلی دخی اخذ اولنه‌رق تعیین اولنه‌جق عدد ثانیه (ى) ایله اشعار اولندقده ثانیه

مذکوره‌نك ۵۳َ ۳۶° یه علاوه‌سی اقتضا ایتمکین بروجه آتی نسبت تنظیم اولنور .

$$\frac{\text{ق}}{٦٠}=\frac{١٥٩٤}{٢٦٣١} \text{ یاخود } \text{ق}=\frac{١٥٩٤\times٦٠}{٢٦٣١}=٣٦,٣٥$$

استخراج اولنمغله مطلوب زاویه ه = ۳۶,۳۵ً ۵۳َ ۳۶° اولوب اصول حسابی دخی

لع م ه = ۱,۸۷۵۴۳۲۸

لع م ۳۶°,۵۳َ = ۱,۸۷۵۲۷۳۴

لع م ۳۶,۳۵ً = ۱۵۹۴

$$٣٦,٣٥ً=\frac{١٥٩٤\times٦٠}{٢٦٣١}$$

ه = ۳۶° ۵۳َ ۳۶,۳۵ً اولور .

(دوپوی) لك جدوللری استعمال اولنور ایکن متناسب قسملرك مندرج بولنمش اولمسی حسبیله حسابی سرعتله اجرا اولنورکه بروجه آتی کوسترلشدر.

| | | | |
|---|---|---|---|
| لع م = | ۱,۷۷۵۴۳۲۸ | فصل | ۴۳۹ |
| لع م ۳۶° ۵۳َ ۳۰ً = | ۱,۸۷۵۴۰۵۰ | | ۲۷۸ |
| ۶ً | ایچون | ۲۶۳ | ۱۵ |
| ۰۳ | » | ۱۳ | ۲ |
| ۰,۰۵ | | ۲ | |

لع م ۳۶° ۵۳َ ۳۶,۳۵ً = ۱,۸۷۵۴۳۲۷ اولمش اولور.

(۲) لع محس س = ۱,٦٥٤٤١٤٧َ اعطا اولنمش برلغارتمه اولسه محس جدولندن تحری اولندقده مذکور لغارتمه ٦٣ْ۱۰َ ایله ٦٣ْ۱۱َ تجیلرینك لغارتمه‌لری ارەسنده بولندیغندن قوس مطلوب — ۲٤۹۸ تفاضلیله متناسب بر مقدارك ازدیادیله ٦٣ْ۱۰َ,,لق قوسدن عبارت اوله‌جغندن بو حالده لغارتمهٔ معطیه ایله ٦٣ْ۱۰َ مقدارینك محس لغارتمه‌سی بیننده اولان فضل — ۱٤۳۷ اولمغله بو صورتده فضل مذکورك ویره‌جکی عدد ثانیه‌یی ٦٣ْ۱۰َ یه علاوه ایتمك اقتضا ایدر. مقدار مذکور دخی $\frac{۱٤۳۷\times٦۰}{۲٤۹۸}$ = ۳٦,٥۱ً اوله‌رق قوس مطلوب ایسه س = ٦٣ْ,,۱۰َ,,۳٦,٥۱ً اولمش اولور.

سائر مثلثات خطلری ایچون عین اصول وحساب اجرا اولنوب جیبلر ایچون اولان حسابات مماسلر ایچون دخی طبقیسی وتمام جیبلر ایچون اولان حسابات تمام مماسلر ایچون دخی طبقیسی یاپیلور.

## ﴿ تطبیقات ﴾

(۱) حس س = $\frac{۲}{۳}$ معادله‌سیله کوستریلان برکوچك مثبت قوسی حساب ایتمك. لغارتمه‌یه تطبیق ایدلدکده

لع حس س = لع ۲ — لع ۳ یاخود

لع حس س = ۰,۳۰۱۰۳۰۰ — ۰,٤٧٧١٢١٢٥ = ۱,۸۲۳۹۰۸۸َ

لع حس س = ۱,۸۲۳۹۰۸۸َ

ویاخود لع حس ٣٠ًً,,٤٨َ,,٤١° = ١,٨٢٣٨٩١٩َ فضل ٢٦٣

١٦٩٠ = ٧ًً بولنور

امدی س = ٣٧ًً,,٣٨َ,,٤١° اولمش اولور.

سائر قوسلر (ماده ١٦)ده بیان ٢ ق π + س و (٢ ق + ١)π — س دستورلرنده ق ایچون ١ ، ٢ و ٣ فرض ومحلنه وضع ایدرك تعیین اولنورلر .

مع٢ ص = ٣ ایله کوستریلان معادله‌دن ص کمیتنك الك اصغر مثبت قوسنی بولمق .

مع٢ ص = ١ + مم ص اولمغله ١ + مم٢ ص = ٣ اولوب مم٢ ص = ٢ اولور.

لغارتمه‌یه تحویل ایله ٢ لع مم ص = لع ٢ = ٠,٣٠١٠٣٠٠

اوله‌رق لع مم ص = ٠,١٥٠٥١٥٠ و ص = ٥٤° ٤٤َ ٨ًً اولمش اولور .

سائر قوسلر ٢ ق π + ص دستوریله تعیین اولنورلر.

(٣) ٣ ممم ص + ٢ مم ص = ٥ معادله‌سنده (ص) مجهولنك قیمتنی برنجی ربع دائره‌ده تعیین ایتمك .

ممم ص محلنه مساوی اولان $\frac{١}{\text{مم ص}}$ وضع اولندقده

$\frac{٣}{\text{مم ص}}$ + ٢ مم ص = ٥ یاخود ٢ مم٢ ص — ٥ مم ص + ٣ = ٠

اولوب اشبو ایکنجی درجه معادله حل اولندقده

مم ص = $\frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٢٤}}{٤}$ = $\frac{٥ \pm ١}{٤}$ = ١ یا ١,٥

و ص = ٤٥°

یاخود مم ص = ١,٥ اولدیغنه نظراً ص = ٥٦° ١٧َ ٣٥ًً,٧ اولور.

(٤) مم ص = مم ب + مم ج معادله‌سندن (ص) زاویه‌سنی حساب ایتمك .

ب = ٣٠ً,,٢٤َ,,٣٣° ، ج = ٤٠ً,,١٩َ,,٤٩° فرضیله (ماده ٤٢ دستور ٢٩) موجبنجه مم ص = مم ب + مم ج معادله‌سی شو صورتله

مم ص = حس (ب + ج) / محس ب محس ج افاده اولنوب لغارتمه‌سی الندقده

لع مم ص = لع حس (ب + ج) — لع محس ب — لع محس ج اولوب

لع حس (ب + ج) = لع حس ١٠ً,,٤٤َ,,٨٧° =

١̄,٩٩٩٦٦٠٩

[*] لعَ حس ب = ٠,١٠٥٩٠٣٩

لعَ محس ج = ٠,١٨٥٩٣١٨

لع مم ص = ٠,٢٩١٤٩٦٦

ص = ٦٢° ٥٥ ٤٢,٨ اولمش اولور .

(٥) محس س = — ٣/٤ معادله‌سندن (س) كمیتنك الك اصغر اولان مثبت قوسنی تعیین ایتمك . زاویهٔ مذكوره‌نك متممی ع فرض اولندقده یكدیكرینك متممی اولان ایكی زاویه‌نك تمام جیبلری قیمتجه مساوی واشارتجه مختلف بولنه.

[*] بر لغارتمه‌نك تمامی لغارتمه‌سی (لعَ) اشارتیله ارائه اولنمشدر.

جقلرندن بوصورتده محس ع = — محس س = ٣/٤ اولوب
لغارتمه‌یه تطبیق ایدلدکده

لع محس ع = لع ٣ + لعَ ٤ اوله‌رق

لع ٣ = ٠,٤٧٧١٢١٢٥

لعَ ٤ = ١,٣٩٧٩٤٠٠١

١,٨٧٥٠٦١٢٦ = لع محس ع

ع = ٤١°,,١٤,,٣٤,٦ اولوب

و س = ١٨٠ — ع = ١٣٨°,,٣٥,,٢٥,٤ اولور .

(٦) و = ٢٨°,,١٩,,٣٧,٤ ، ك = ١٦°,,٤٧,,٣,٦ اولمق
اوزره حس س = حس و + حس ك معادله‌سندن س
زاویه‌سنی ٠° ایله ٩٠° بیننده حساب ایتمك .

حس و + حس ك = ٢ حس ١/٢ (و+ك) محس ١/٢
(و — ك) اولمغله بو حالده

حس س = ٢ حس ١/٢ (٤١ ٦ ٤٥°) محس ١/٢
(٣,٨ ٣٢ ١١°) = ٢ حس ٢٠,٥ ٢٣ ٢٢° محس ١٦,٩ ٤٦ ٥° لغارتمه‌یه
تحویل ایله

لع حس س = لع ٢ + لع حس ٢٠,٥ ٢٣ ٢٢° + لع
محس ١٦,٩ ٤٦ ٥° اولور .

لع ۲ = ۰,۳۰۱۰۳۰۰

لع حس ۲۰,۵ ,,۳۳ ,,۲۲° = ۱,۵۸۳۸۵۵٤

لع محس ۱٦,۹ ,,٤٦ ,,۵° = ۱,۹۹۷۷۹۳۱

---

لع حس س = ۱,۸۸۲٦۷۸۵

س = ۱۳ ,,٤۵ ,,٤۹° اولمش اولور .

(۷) حس س + $\frac{۱۷}{۸}$ محس س = $-\frac{۲}{۳}$ معادله‌سنی حل ایتمك .

هر بر قیمتك مماس فرضی ممکن اولدیغندن ه هرقنغی متوسط زاویه اولمق اوزره مم ه = $\frac{۱۷}{۸}$ فرض اولندقده معادلهٔ معطیه شو حس س محس ه + محس س حس ه = $-\frac{۲}{۳}$ محس ه صورتی یاخود $-$ حس (س + ه) = $\frac{۲}{۳}$ محس ه صورتی کسب ایدر.

لع ۱۷ = ۱,۲۳۰٤۲۳۸۸

$-$ لع ۸ = ۰,۹۰۳۰۹۰۰

---

لع مم ه = ۰,۳۲۷۷۳۵۸۹

ه = ۵٦ ٤۷ ٦٤°

لع تحس ه = ١̅,٦٢٩٢٢٢٥

لع ٢ = ٠,٣٠١٠٣٠٠

لَع ٣ = ١̅,٥٢٢٨٧٨٨

---

لع [حس(س + ه)] = ١̅,٤٥٣١٣١٣

قوس مطلوب ٣٠″ ٢٩′ ١٦° اولور .

امدی حس (س + ه) منفی اولدیغی کبی تقابل ایده‌جکی اك اصغر ومثبت قوس ممکنه اوچنجی ربع دائره‌ده نهایت بوله‌جغندن بوصورتده

(س + ه) = ٣٠″ ٢٩′ ١٩٦° ، س = ٣٤″ ٤١′ ١٣١° اوله‌رق اك اصغر منفی اولان قوسی دخی س = — ٣٠″ ٢٩′ ١٦° — ه = — ٢٦″ ١٧′ ٨١° اولور .

٢ ق π + ن و (٢ ق + ١) π — ن دستورلرینه تطبیقاً سائر قوسلر دخی بولنور .

(٨) حس ٢ س = ن تحس س معادله‌سنده ن = ١ ، ن = ٢ ، ن = √٢ و ن = √٣ فرضیله س قوسنك اك کوچك قیمتنی تعیین ایتمك مطلوبدر.

٢ حس س تحس س = ن تحس س یاخود

تحس س (٢ حس س — ن) = ٠

$\text{حس س} = ٠$ ، $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$ ، $\text{س} = ٢$ ، و $\pi \pm \frac{\pi}{٢}$ (١)

$\text{حس س} = \frac{\text{ن}}{٢}$ (٢)

## تطبيقات

ن = ١ ، حس س = $\frac{١}{٢}$ ، س = $٣٠^\circ$

ن = ٢ ، حس س = ١ ، س = $٩٠^\circ$

ن = $\sqrt{٢}$ ، حس س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، س = $٤٥^\circ$

ن = $\sqrt{٣}$ ، حس س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س = $٦٠^\circ$

## دردنجی فصل

(مثلثلرك حللری)

### باب اول

(مثلث قائم الزاویه‌لرك بیانی)

بر مثلثك زوایای ثلثه‌سی ب ، ح ، ی واشبو زاویه‌لره مقابل ضلعلری دخی بَ ، حَ ، یَ حرفلریله اشارت ایدیلوب ب حرفی ایسه مثلث قائم الزاویه‌لرده دائما زاویهٔ قائمه‌یی و بَ حرفی وتر قائمه‌یی ارائه ایدر.

**٥٣ دعوی ١ — برمثلث قائم الزاویه‌ده زاویهٔ قائمه‌یی محیط اولان ضلعلردن هر بری وتر قائمه‌نك ضلعین مذکورین قارشوسنده واقع زاویه جیبلرینه ویاخود اتصاللرنده اولان زوایه تمام جیبلرینه مستطیله مساوی اولور.**

مثلا (شکل ٤١) ب ح ی مثلث قائم الزاویه‌سنده ح نقطه‌سی مرکز ح ی نصف قطریله برقوس دائره رسم اولندقده

(شکل ٤١)

(ماده ٢) حس ح = ب ی / ح ی = حَ / بَ

اولوب حَ = بَ حس ح اولور.

ح ى زاويه‌لری يكديكرينك تمامی بولنملريله حس ح = محس ى اوله‌جغندن بو صورتده حَ = بَ محس ى اولوب عين اصول ايله دخی ىَ = بَ حس ى ، ىَ = بَ محس ح اولور .

تنبيه . — مذكور دعوی ( ماده ٣١ ) ده بيان اولنان مرتسماتك اساس دعواسنك برتطبيقندن عبارتدر زيرا زاويهٔ قائمه‌يی محيط اولان ضلع قائمه‌لردن هر قنغی بری وتر قائمه‌نك مرتسمی اوله‌رق بو صورتده

حَ = بَ محس ى ، ىَ = بَ محس ح

حَ = بَ حس ح ، ىَ = بَ حس ى

اولور .

(شكل ٤٢)

**٥٤ دعوی ٢ — برمثلث قائم الزاويه‌ده زاويه قائمه‌يی محيط اولان ضلعلردن هر قنغی بری ديكرينك ضلع مطلوع قارشوسنده واقع زاويهٔ مماسيله ياخود ضلع مذكورك مجاوری اولان زاويه‌نك تمام مماسيله مستطيلنه مساويدر.**

بونك ايچون (شكل ٤٢) ح نقطه‌سی مركز ح ب نصف قطريله برقوس دائره رسم اولندقده (ماده ٧)

مم ى = $\frac{\text{ب ح}}{\text{ب ى}}$ = $\frac{\text{ىَ}}{\text{حَ}}$ بوحالده ىَ = حَ مم ح اولوب

ى ، ح زاويه‌لری يكديكرينك تمامی اولدقلرندن مم ى = تمم ح اوله‌رق ىَ = حَ تمم ح وينه عين اصول ايله حَ = ىَ مم ح ، حَ = ىَ تمم ى اولور.

تنبيه — اشبو دعوی بوندن اولکندن دخی استخراج اولنه‌بیلور زیرا ءَ = بَ حس ء ، حَ = بَ تحس ء معادله‌لری یك‌دیکری اوزرینه تقسیم اولندقده

$\frac{ءَ}{حَ} = \frac{بَ\ حس\ ء}{بَ\ تحس\ ء}$ = مم ء معادله‌سنی حاصل ایدرلر.

اشبو ایکی دعوی برمثلث قائم الزاویه‌یی اعطا اولنان معلوماته کوره حل ایتمك ایچون کافی اولوب اصول حلی ایسه درت احتمالی حاویدر.

(١) زاویه حاده‌لرندن بریله وتر قائمه‌نك

(٢) زوایهٔ قائمه‌یی محیط اولان ضلعلردن بریله وتر قائمه‌نك

(٣) زوایهٔ حاده ایله زاویهٔ قائمه‌یی محیط اولان ضلعلردن برینك

(٤) زاویهٔ قائمه‌یی محیط اولان ضلعلرك معلوم اولمسی

اشبو درت احتمالدن هر قنغی بری تصادف ایدر ایسه مثلث قائم الزاویه‌نك مجهولات باقیه‌سی استخراج اولنور .

**٥٥** — برنجی احتمال . (بَ) وتر قائمه‌سی (ح) زاویهٔ حاده‌سی معلوم اولان مثلث قائم الزاویه‌نك (ء) زاویه‌سیله (حَ) و (ءَ) ضلعلرینك حلی مطلوب اولسه شو صورتله تعیین اولنور. مطلوب اولان (ء) زاویه‌سی معلوم اولان (ح) زاویه‌سنك تمامی اولدیغندن ء = °٩٠ — ح اولور .

امدی (ماده ٥٣ دعوی ١)

حَ = بَ حس ح ، ءَ = بَ محس ح اولوب مجهولات
باقيه بوصورتله حل اولنمش اولور.

**٥٦** — ايكنجى احتمال (ح) ضلع قائمهله ح زاويهٔ حادهسى
معلوم اولان مثلث قائم الزاويهنك ( ء ) زاويهٔ حادهسيله ( بَ )
وتر قائمهسى و ( ءَ ) ضلعنى حساب ايتمك مطلوبدر. ء زاويهسى
ح زاويهسنك تمامى اولديغنــدن ء = ٩٠° — ح اولور (ماده
٥٣ دعوى ١) حَ = بَ حس ح اولوب بَ = حَ / حس ح اولور.
(ماده ٥٤ دعوى ٢) ءَ = حَ تم ح اولوب مجهولات
باقيه دخى تحصيل اولنمش اولور.

**٥٧** — اوچنجى احتمال (حَ) ضلع قائمهله بَ وتر قائمهسى
معلوم اولان مثلث قائم الزاويهنك (ح) و ( ء ) زاويهلريله (ءَ)
ضلعنى حساب ايتمك مطلوبدر.

مقدما بيان اولنديغى وجهله حس ح = محس ء = حَ / بَ
اولوب ءَ ضلعى دخى ءَ = √(بَ٢ — حَ٢) دستوريله تعيين اولنور
ايسهده دستور مذكورى لغارتمه ايله حساب اولنهجق برصورته
ارجاع ايتمك لازم كلوب بونك ايچون مجذور مذكورى مضروبينه
تفريق وتحليلنــه وضع ايلدكده ءَ = √((بَ + حَ) (بَ — حَ))
اولوب مطلوب حاصل اولور.

تنبيــه — حَ ضلعى بَ دن جزئى فرق ايلديكى حالده

حس ح = تحس د = $\frac{\text{حَ}}{\text{بَ}}$ دستوری بر قیمت متقاربهٔ غیر كافيه اعطا ايدر. زيرا $\frac{\text{حَ}}{\text{بَ}}$ نسبتی واحده اقرب اولديغندن (ح) زاويه‌سی (۹۰°) دن و (د) زاويه‌سی دخی صفردن جزئی فرق ايدر اشبو زاويه‌لر (ماده ٥٠ تنبيه) حاصل تحصيللرنده خطالی بولنه‌جقلرندن اوحالده

$$\text{م}\ \tfrac{1}{2}\ \text{د} = \sqrt{\frac{1 - \text{تحس د}}{1 + \text{تحس د}}}$$

(دستور ٢٠) دستورينی استعمال ايتمك مرجحدر.

وكذا تحس د = $\frac{\text{حَ}}{\text{بَ}}$ اولديغندن دستور مذكورده محلنه وضع ايله

$$\text{م}\ \tfrac{1}{2}\ \text{د} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\text{حَ}}{\text{بَ}}}{1 + \frac{\text{حَ}}{\text{بَ}}}} = \sqrt{\frac{\text{بَ} - \text{حَ}}{\text{بَ} + \text{حَ}}}$$

اشبو دستور يالكز بَ + حَ ايله بَ — حَ حدلرينك لغارتمه‌لرينی ارامق و (دَ) ضلعنی دخی حساب ايتمك كبی محسناتی شاملدر.

٥٨ — دردنجی احتمال. زاويهٔ قائمه‌يی محيط اولان حَ ، دَ ضلعلری معلوم اولان مثلث قائم الزاويه‌نك (ح) ، (د) زاويه‌لرينی و (بَ) وتر قائمه‌سنی حساب ايتمك مطلوبدر.

(ماده ٥٤) زاویهٔ حاده‌لری مم ح = مم ی = $\frac{\acute{ح}}{\acute{ب}}$ دستور-
لریله تعیین اولنور.

وتر قائمه‌سی $\acute{ب}^{۲} = \acute{ح}^{۲} + \acute{ی}^{۲}$ دستورلریله حساب اولنه-
بیلور ایسه‌ده فقط $\acute{ب} = \frac{حب\ ح}{\acute{ح}}$ لغارتمه دستورینی استعمال
ایتمك مرجحدر

زیرا (ح) زاویه‌سی کندی تمامی واسطه‌سیله معلوم دیمك
اولدیغندن حب ح سهولتله تحصیل اولنور.

وسطح مثلث س ایله کوستریلور ایسه س = $\frac{۱}{۲}$ $\acute{ح}$ $\acute{ی}$ اولور.

« اصول حسابی کوسترن »

{ مثائل عددیه بیانی }

آتی الذکر مثاللرده درت احتمال عین بر مثلثه نسبت اولنوب
تحقیقنه خدمت ایدر وامثلهٔ مذکوره بش خانه کسر اعشاری مرتبه-
سنی حاوی اوله‌رق ترتیب اولنان جدوللر ایله حساب ایدلمشدر.

برنجی احتمال.

معلومات { ب = ۹۰ ، $\acute{ب}$ = ۱۲٥٤ زراع اعشاری ، ح = ٤۲° ٤۸َ

ی = ۹۰° — ح = ۹۰° — ٤۲° ٤۸َ = ٤۷° ۱۲َ

دستورلر { $\acute{ح}$ = $\acute{ب}$ حب ح ، لع $\acute{ح}$ = لع $\acute{ب}$ + حب ح
$\acute{ی}$ = $\acute{ب}$ تحب ح ، لع $\acute{ی}$ = لع $\acute{ب}$ + تحب ح

| | |
|---|---|
| لع بَ = ٣,٠٩٨٣٠ | لع بَ = ٣,٠٩٨٣٠ |
| لع حس حـ = ١,٨٣٢١٥ | لع محس حـ = ١,٨٦٥٥٤ |
| ٢,٩٣٠٤٥ | ٢,٩٦٣٨٤ |
| حَـ = ٨٥٢,٠٢ | دَ = ٩٢٠,٠٨ زراع اعشارى اولمش اولور . |

ايكنجى احتمال .

معلومات { ب = ٩٠° ، حَـ = ٨٥٢,٠٢ زراع اعشارى ، حـ = ٤٢° ٤٧َ }

د = ٩٠° — حـ = ٩٠° — ٤٢° ٤٨َ = ٤٧° ١٢َ

دستورلر { بَ = حَـ / حس حـ ، لع بَ = لع حَـ — لع حس حـ
دَ = حَـ عم حـ ، دَ = لع حـ + لع عم حـ }

| | |
|---|---|
| لع حـ = ٢,٩٣٠٤٥ | لع حَـ = ٢,٨٣٠٤٥ |
| لع حس حـ = ١,٨٣٢١٥ | لع عم حـ = ٠,٠٣٣٣٨ |
| ٣,٠٩٨٣٠ | ٢,٩٦٣٨٣ |
| بَ = ١٢٥٤ | دَ = ٣٢٠,٠٨ ذراع اعشارى اولمش اولور. |

اوچنجی احتمال.

معلومات:
ب = ٩٠°
بَ = ٢٩٧,٨٠
حَ = ٢٨٨

دستورلر:
دَ = √ ( بَ + حَ ) ( بَ − حَ )
م ½ د = √ ( بَ − حَ ) / ( بَ + حَ )

لع دَ = ½ [ لع ( بَ + حَ ) + لع ( بَ − حَ ) ]

لع م ½ د = ½ [ لع ( بَ − حَ ) − لع ( بَ + حَ ) ]

حسابات متوسطه:
بَ + حَ = ٧٨٥,٧
بَ − حَ = ٩,٧ ذراع اعشاری

لع ( بَ + حَ ) = ٢,٨٩٥٢٦
لع ( بَ − حَ ) = ٠,٩٨٦٧٧
٣,٨٨٢٠٣

لع دَ = ٣,٩٤١٠١

دَ = ٨٧,٣٠ ذراع اعشاری

لع ( بَ − حَ ) = ٠,٩٨٦٧٧
− لع ( بَ + حَ ) = ٢,٨٩٥٢٦
٢̄,٠٩١٥١

لع م ½ د = ١̄,٠٤٥٨٥
½ د = ٦°,٢٠′,٢٥″

د = ١٢°,٤٠′,٥٠″ و ح = ٨٧°,١٩′,١٠″

معلومات
ب = ٩٠°
حَ = ٨٧
ءَ = ٨٧,٣٠

دستورلر
م ح = حَ / ءَ ، لع م ح = لع حَ — لع ءَ
بَ = حَ / حس ح ، لع بَ = لع حَ — لع حس ح

لع حَ = ٢,٥٨٨٨٣
— لع ءَ = ١,٩٤١٠٢
٠,٦٤٧٨١
ح = ١٠° ١٩َ ٠٧ً ، ء = ٤٠ً ١٣°

لع حَ = ٢,٥٨٨٨٣
لع حس ح = ١,٩٨٩٢٧
٢.٥٩٩٥٦
بَ = ٣٩٧,٧٠ زراع اعشاری اولمش اولور .

## تطبيقات

(١) ضلع قائملرك يكديكرينه نسبتی ايله وتر قائمه‌سی معلوم اولان مثلث قائم الزاويه‌نك مجهولات باقيه‌سنی استخراج ايتمك.

ضلعين مذكورين بيننده اولان نسبت زاويهٔ حاده‌لردن برينك مماسنه مساوی اولديغندن حَ / ءَ = م ح اولوب اشبو مسئله برنجی احتماله مطابقدر.

(٢) (بَ) وتر قائمه‌سیله (ع) ارتفاعی معلوم اولان مثلث قائم الزاویه‌نك مجهولات باقیه‌سنی استخراج ایتمك. (١٨٦٩ تموزینك ١٥ شنده صوربون مکتبنده ایراد اولنمشدر.) برنجی صورتله حلی

حَ٢ + دَ٢ = بَ٢
٢ حَ دَ = ٢ بَ ع

معادله‌لری بالترتیب (ایکنجی معادله‌نك طرفیندن هر بری مثلثك مساحهٔ سطحیه‌سنك درت مثلنی اشعار ایدر.)

مذکور معادله‌لر برکره جمع و برکره طرح اولندقلرنده (حَ + دَ)٢ = بَ٢ + ٢ بَ ع ، (حَ — دَ)٢ = بَ٢ — ٢ بَ ع اولوب بونلردن دخی حَ + دَ = √ بَ (بَ + ٢ ع) ، حَ — دَ = √ بَ (بَ — ٢ ع) اولور.

بو واسطه ایله زاویهٔ قائمه‌یی محیط اولان ضلعلرك مجموعیله بینلرنده‌کی فضلی معلوم دیمك اولمغله دردنجی احتماله مطابقدر.

ایکنجی صورتله حلی . حَ دَ = بَ ع اولوب حالبوکه حَ = بَ حس ح ، دَ = بَ تحس ح اولدقلرندن حَ دَ = بَ٢ حس ح تحس ح یاخود بَ ع = بَ٢ حس ح تحس ح ویاخود بَ ع = بَ٢ حس ٢ ح اولوب بو واسطه ایله حس ٢ ح = ٢ع / بَ اولورکه (٢ ح) زاویه‌سنی بعد التعیین (ح) زاویه‌سی و مجهولات سائره‌سی بالسهوله تحصیل اولنور.

(٣) زاویهٔ قائمه‌یی محیط اولان ضلعلرك وتر قائمه اوزرنده

اولان حً ، ءً مرتسملری معلوم ایکن مثلث مذکورك مجهولات سائرەسنی تعیین ایتمك.

وتر قائمەسی قاعدە وارتفاع مثلث ع فرضیله عً² = حً. ءً بولنوب ںَ = حً + ءً اولدیغندن اولکی مسئلەدە اولدیغی مثللو (حً + ءً) وتر قائمەسی ایله √ حً ءً مقداریله معین ارتفاعی معلوم اولان مثلث قائم الزاویەنك مجهولات سائرەسی دخی تحصیل اولنور.

(٤) ںَ وتر قائمەسیله زاویۀ قائمەیی محیط اولان ضلعلر بیننده‌کی ك فضلی معلوم اولان مثلث قائم الزاویەنك مجهولات سائرەسنی استخراج ایتمك.

حَ = ںَ حس ح ، ءَ = ںَ حس ء معادلەلری بالترتیب بوحالده
حَ — ءَ = ںَ (حس ح — حس ء) = ٢ ںَ حس ١/٢ (ح — ء)
تحس ١/٢ (ح + ء) اولوب (٢٥) دستورینه تطبیق ایله ١/٢ (ح+ء)
= ٤٥ᵒ اولمغله تحس ١/٢ (ح + ء) = ١/٢ √٢ اولوب
ك = ںَ √٢ حس ١/٢ (ح — ء) اولەرق بو واسطه ایله
حس ١/٢ (ح — ء) = ك / ںَ √٢ اولورکه ١/٢ (ح — ء) زاویەسی
تحصیل اولندقدنصکره (دعوی ١) ح ، ء زاویەلری دخی تعیین اولنور.

(٥) ںَ وتر قائمەسیله داخلنه مرسوم دائرەنك ر نصف قطری معلوم اولان مثلث قائم الزاویەنك مجهولات باقیەسنی استخراج ایتمك.

هندسه‌ده کورلدیکی اوزره بر مثلث قائم الزاویه‌نك ضلع قائملری مجموعی وتر قائمه‌سیله داخلنه مرسوم دائره‌سی نصف قطرینك ضعفی مجموعنه مساوی اولدیغندن بو صورتله بَ وتر قائمه‌سیله بَ + ۲ ر مقـداریله معین ضلع قائملری مجموعی معلوم اولان مثلثك مجهولات سائره‌سی دخی تعیین اولنور.

طبق مسئلهٔ سابقه مثللو اجرای عمل ایله.

$\text{جب}\ \frac{1}{2}(\text{ح} - \text{ء}) = \frac{\text{بَ} + 2\,\text{ر}}{\text{بَ}\sqrt{2}}$ دستورندن $\frac{1}{2}(\text{ح} - \text{ء})$ بعد التعیین و $\frac{1}{2}(\text{ح} + \text{ء}) = 45^{\circ}$ اولدیغندن بوحالده ح ، ء زاویه‌لری بالسهوله تعیین اوله‌جقلری کبی حَ ، ءَ ضلعلری دخی تحصیل اولنور .

(٦) م ارتفاعیله داخلنه مرسوم دائره‌نك ر نصف قطری معلوم اولان مثلث متساوی الساقینك حلی مطلوبدر.

ب رأس زاویه‌سنی م ارتفاعی ایکی مساوی قسمه تقسیم ایلدیکندن $\frac{\text{ب}}{2}$ مقداری ح ، ء زاویه‌لرندن هر برینك تمامی اولور.

( شکل ۴۳ )

مرکز دائره ایله مساوی ضلعلردن برینك تماس نقطه‌سی وصل اولنـدقده $\text{ر} = (\text{م} - \text{ر})\ \text{جب}\ \frac{\text{ب}}{2}$ وبورادن $\text{جب}\ \frac{\text{ب}}{2} = \frac{\text{م} - \text{ر}}{\text{ر}}$ اولور .

وبوواسطه ایله سائر زاویه‌لر دخی تعیین اولنورلر. مثلثلر دخی

بَ/٢ = م مم ب/٢ ، بَ = ٢ م مم ب/٢

دَ = حَ = م/(حس ح) = م/(محس ب/٢) اولور.

(٧) (د) زاويهٔ حادهسيله مجاور بولنان ضلعلری مجموعی بَ + حَ = ٢ م مقدارينه مساوی اولان بر مثلث قائم الزاويهیی حل ايتمك . مجهول اولان ضلع ( س ) حرفيله كوسترلدكده س^٢ = بَ^٢ — حَ^٢ = (بَ + حَ) (بَ — حَ) = ٢ م (بَ — حَ) اولوب حالبوكه بَ + حَ = ٢ م اولديغندن بَ — حَ = س^٢/(٢ م) اولور بَ حل اولندقده

بَ = (٤ م^٢ + س^٢)/(٢ م) بولنور لكن س = بَ حس د اولديغندن بوصورتده س = (٤ م^٢ + س^٢)/(٤ م) حس د اولوب (س) مجهولنه نظراً معادله بالتنظيم س^٢ حس د — ٤ م س + ٤ م^٢ حس د = ٠ .

اشبو درجهٔ ثانيه معادلهسندن (س) حل اولندقده

س = (٢ م ± √(٤ م^٢ — ٤ م^٢ حس^٢ د))/(حس د) ياخود

س = (٢ م ± ٢ م √(١ — حس^٢ د))/(حس د) اولوب جذريهنك برنجی يعنی زائد اشارتنه نظراً

$$س = \frac{۲ م (۱ + جتس ء)}{جس ء} = \frac{۲ م × ۲ جتس^{۲} \frac{۱}{۲} ء}{۲ جس \frac{۱}{۲} ء جتس \frac{۱}{۲} ء}$$

یاخود $س = ۲ م جتم \frac{۱}{۲} ء$ اولور.

ایکنجی ناقص اشارتنه نظراً دخی

$$س = \frac{۲ م (۱ — جتس ء)}{جس ء} = \frac{۲ م × ۲ جس^{۲} \frac{۱}{۲} ء}{۲ جس \frac{۱}{۲} ء جتب \frac{۱}{۲} ء}$$

ویاخود

$سَ = ۲ م تم \frac{۱}{۲} ح$ اولور.

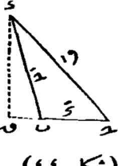
## ﴿ باب ثانی ﴾

### ﴿ مثلث مائل الزوایانك صورت حللری ﴾

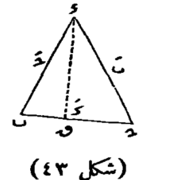
**٩٥ دعوی ١ — بر مثلثده ضلعلر مقابل بولنان زاویه‌لرك جیبلرینه متناسب اولور .**

مثلا ب ح ى مثلثنك ى رأسندن (شکل ٤٣) ب ح قاعده‌سی اوزرینه ویاخود (شکل ٤٤) قاعدۀ مذکوره‌نك اخراجی اوزرینه ى ق عمودی رسم اولندقده برنجی حاله نظراً ى ب ق ، ى ح ق مثلث قائم الزاویه‌لرندن ى ق = حَ حس ب ، ى ق = بَ حس ح معادله‌لری تعیین ومساویلردن بر معادله تشکیل اولنده حَ حس ب = بَ حس ح یاخود

$$\frac{بَ}{حس\ ب} = \frac{حَ}{حس\ ح}$$ اولور .



(شکل ٤٣)



(شکل ٤٤)

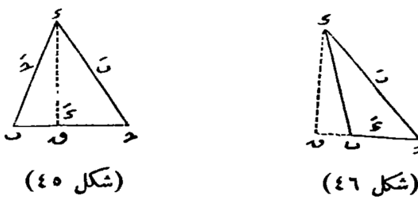
ایکنجی حاله نظراً کذلك ى ق = حس ب اولور . زیرا (ماده ٢٠) ب زاویه‌سنك متممی بولنان زاویه‌لرك جیبلری مساوی بولنوب وبنه ى ق = بَ حس ح اولورکه مساویلردن بر معادله تشکیل ایله

$\frac{بَ}{حس\ ب} = \frac{حَ}{حس\ ح}$ بولنوب و بو مثللو اثبات اولنور كه

بَ حس د = دَ حس ب دخى اوله‌جقندن بو صورتده

$\frac{بَ}{حس\ ب} = \frac{حَ}{حس\ ح} = \frac{دَ}{حس\ د}$ اولور

**٦٠ دعوى ٢ — بر مثلثده بر ضلعنك مربعى ديكر ايكى ضلعنك مربعلرى مجموعيله ضلعين مذكورينك بربريله مستطيلنك ضعفنك بينلرنده واقع زاويه‌نك تمام جيبنه حاصل ضربى بينلرنده‌كى فضله مساوى اولور.**



(شكل ٤٥)　　(شكل ٤٦)

(١) ب زاويه‌سى حاده اولديغنه كوره (شكل ٤٥) د رأسندن ب ح قاعده‌سى اوزرينه د و عمودى رسم اولندقده هندسه‌ده كورلديكى اوزره $بَ^٢ = حَ^٢ + دَ^٢ - ٢\ دَ \times ب\ و$ اولوب لكن ب و = حَ تحس ب اولديغندن محلنه وضع اولندقده $بَ^٢ = حَ^٢ + دَ^٢ - ٢\ دَ\ حَ$ تحس ب اولور.

(٢) ب زاويه‌سى (شكل ٤٦) منفرجه اولديغنه كوره $بَ^٢ = حَ^٢ + دَ^٢ + ٢\ دَ \times ب\ و$ اولوب حالبوكه ب و = حَ تحس و ب د اولديغندن واشبو زاويه ب زاويه‌سنك متممى بولنديغندن تحس و ب د = — تحس ب اوله‌رق ب و

= — حَ جس ب اولمغله محلنه وضع اولندقده بَ٢ = حَ٢
+ دَ٢ — ٢ حَ دَ جس ب اولور.

تنبيه — اشبو دعوى واسطه‌سيله مثلث اقسام سته‌سى ايچون بروجه آتى اوچ دستور تحصيل اولنور.

(١)
بَ٢ = حَ٢ + دَ٢ — ٢ حَ دَ جس ب
حَ٢ = بَ٢ + دَ٢ — ٢ بَ دَ جس ح
دَ٢ = بَ٢ + حَ٢ — ٢ بَ حَ جس د

بونلردن ماعدا ديكر مناسباته دخى موفق اولنه‌بيلور.
مثلا دَ = ح و + ب و اوله‌رق ح و = بَ جس ح
وكذا ب و = حَ جس ب اولدقلرندن محلنه وضع ايله

(٢)
دَ = بَ جس ح + حَ جس ب وينه بووجهله
بَ = حَ جس د + دَ جس ح
و حَ = بَ جس د + دَ جس ب تحصيل اولنور

فرقِ طقوز ماده‌سنده‌كى استخراج اولنان

(٣) [*]
بَ / حس ب = حَ / حس ح = دَ / حس د
ب + ح + د = ١٨٠°

دستورلرى تحصيل اولنور.

---

[*] بَ : (حَ + دَ) = جس ١/٢ (ح + د) : جس ١/٢ (ح — د)
بَ : (حَ — دَ) = حس ١/٢ (ح + د) : حس ١/٢ (ح — د)
حَ + دَ : حَ — دَ = مم ١/٢ (ح + د) : مم ١/٢ (ح — د)
ظهور ايدن اشبو نسبتلر بالهندسه تعيين اولنورلر.

بر مثلثی حل ایتمك ایچون معادلاتك اوچ حالی اولوب فقط بر مثلث بری ضلع جنسندن اولمق اوزره اوچ معلومات واسطه‌سیله تعیین اولنه‌رق (۳) رقمیله کوستریلان معادلات مثلثك اقسام سته‌سی ارەسندەکی مربوطیتی ارائه ایدن یالکز بشقه‌جه دستورلردر

---

ب ح د مثلثنده ب نقطه‌سی مرکز اعتبار ایدیله‌رك ب ح نصف قطریله رسم اولنان نصف دائره قوسی ب د خطنی ط، ق نقطه‌لرنده قطع ایتمکله

زاویهٔ ق = ½ ب = ۹۰° − (ح + د)/۲

» د ط ح = ۹۰° + ½ ب = ۱۸۰° − (ح + د)/۲

» د ح ط = (ح − د)/۲

» د ح ق = ۹۰° + (ح − د)/۲ اولوب

حادث اولان د ح ق مثلثنده

د ح : د ق = حس د ق ح : حس د ح ق    (شکل (٤٧))

ویاخود

بَ : حَ + دَ = جس ½ (ح + د) : جس ½ (ح − د)

وکذا د ط ح مثلثنده د ح : د ط = حس د ط ح : حس د ح ط

بَ : حَ − دَ = حس ½ (ح + د) : حس ½ (ح − د)

اوچنجی مناسبتی استحصال ایچون ط نقطه‌سندن ح ق خطنه موازی ط ل خطی رسم اولندقده اشبو خط ح ط خطنه عمود اولور.

ط ح ق ، ط ح ل مثلث قائم الزاویه‌لرنده

ظم ½ (ح + د) = ح ق / ح ط

ظم ½ (ح − د) = ط ل / ح ط اولوب بو تقدیرجه

اشبو اوچ حالك هر بری دیكر ایكیسنه بالسهوله ارجاع ایدیله‌بیلور .

**٦١** — اعطا اولنان معلوماته كوره بر مثلثك حلنده باشلوجه درت احتمال واردر.

(١) بر ضلعیله ایكی زاویه‌سی

---

$$\frac{\text{مم}\,\frac{١}{٢}\,(\text{ح}+\text{د})}{\text{مم}\,\frac{١}{٢}\,(\text{ح}-\text{د})}=\frac{\text{ق ح}}{\text{ط ل}}\ \text{یاخود}\ \frac{\text{د ق}}{\text{ط د}}\ \text{اولور بوصورتده}$$

$$\frac{\acute{\text{ح}}+\acute{\text{د}}}{\acute{\text{ح}}-\acute{\text{د}}}=\frac{\text{مم}\,\frac{١}{٢}\,(\text{ح}+\text{د})}{\text{مم}\,\frac{١}{٢}\,(\text{ح}-\text{د})}\ \text{اولور}$$

نتیجه — مثلثك اضلاع ثلثه‌سی مجموعی ٢ ق ایله ارائه اولنور ایسه برنجی تناسبدن

$$\frac{\text{حس}\,\frac{١}{٢}\,\text{ب}}{٢\,\text{تحس}\,\frac{١}{٢}\,\text{ح}\ \text{تحس}\,\frac{١}{٢}\,\text{د}}=\frac{\acute{\text{ب}}}{٢\ \text{ق}}\ \text{یاخود}$$

$$\frac{\text{حس ب}}{٤\,\text{تحس}\,\frac{١}{٢}\,\text{ب}\ \text{تحس}\,\frac{١}{٢}\,\text{ح}\ \text{تحس}\,\frac{١}{٢}\,\text{د}}=\frac{\acute{\text{ب}}}{٢\ \text{ق}}\ \text{اولمغله}$$

بر مثلثده $\acute{\text{ب}}:٢\ \text{ق}=\text{حس ب}:\text{حس ب}+\text{حس ح}+\text{حس د}$ اولوب بو حالده

$$\text{حس ب}+\text{حس ح}+\text{حس د}=٤\,\text{تحس}\,\frac{١}{٢}\,\text{ب}\ \text{تحس}\,\frac{١}{٢}\,\text{ح}$$

$\text{تحس}\,\frac{١}{٢}\,\text{د}$ اولور .

ایكنجی تناسبدن

$$\frac{\text{تحس}\,\frac{١}{٢}\,\text{ب}}{٢\,\text{حس}\,\frac{١}{٢}\,\text{ح}\ \text{تحس}\,\frac{١}{٢}\,\text{د}}=\frac{\acute{\text{ب}}}{٢\,(\text{ق}-\acute{\text{د}})}$$

(٢) ایکی ضلع واشبو ضلعلردن هرقنغی برینك مقابل زاویه‌سی

(٣) ایکی ضلع وبینده واقع زاویه

(٤) اضلاع ثلثه‌سی. معلوما اعطا اولنمسیدر.

**٦٢** احتمال ١ — $\text{ب}'$ ضلعیله ج ، د زاویه‌لری معلوم اولان مثلثك ب زاویه‌سیله $\text{ج}'$ ، $\text{د}'$ ضلعلری مطلوبدر .

ب زاویه‌سی دیکر معلوم زاویه‌لر مجموعنك متممی اولدیغندن $\text{ب} = 180^\circ - (\text{ج} + \text{د})$ اولور.

(ماده ٥٩) ضلعلر ایله مقابل زاویه جیبلری ارەسنده تحصیل اولنان مناسبات واسطه‌سیله $\text{ج}' = \dfrac{\text{ب}'\ \text{حس ج}}{\text{حس ب}}$ ، $\text{د}' = \dfrac{\text{ب}'\ \text{حس د}}{\text{حس ب}}$ اولمغله اشبو دستورلرله $\text{ج}'$ ، $\text{د}'$ ضلعلری دخی حساب اولنور .

**٦٣** احتمال ٢ — $\text{ب}'$ ، $\text{ج}'$ ضلعلریله $\text{ب}'$ ضلعنه مقابل

---

$$\frac{\text{ب}'}{2\,(\text{ق} - \text{د}')} = \frac{\text{حس ب}}{4\ \text{حس}\ \frac{1}{2}\text{ب}\ \text{حس}\ \frac{1}{2}\text{ج}\ \text{محس}\ \frac{1}{2}\text{د}}$$

$$\frac{\text{ب}'}{2\,(\text{ق} - \text{د}')} = \frac{\text{حس ب}}{\text{حس ب} + \text{حس ج} - \text{حس د}}$$

اوله‌رق هر مثلثده

$$\text{حس ب} + \text{حس ج} - \text{حس د} = 4\ \text{حس}\ \frac{1}{2}\text{ب}\ \text{حس}\ \frac{1}{2}\text{ج}$$

$\text{محس}\ \frac{1}{2}\text{د}$ اولور.

بولنان ب زاویه‌سی معلوم ایکن ح ، د زاویه‌لریله ضلع ثالثی مطلوبدر .

اولامرده ح زاویه‌سی حب ح = حَ حب ب / بَ دستوریله تحصیل اولنوب مؤخراً د = ١٨٠° — (ب + ح) ، دَ = بَ حب د / حب ب دستورلریله تعیین اولنورلر.

**٦٤** مناقشه — ح زاویه‌سی ایسه زیرده‌کی حب ح = حَ حب ب / بَ دستوریله تعیین اولندیغندن مسئله‌نك حلی ممكن اوله‌بیلمك ایچون (شکل ٤٧) حب ح = ١ یاخود حب ح < ١ اولمسی ایجاب ایدر . برنجی فرضاتده ح = ٩٠° اولوب بَ = حَ حب ب اوله‌جغندن بو ایسه د و عمودندن عبارت اوله‌رق مسئله‌نك یالکز بر درلو حلی اولور .

(شکل ٤٧)

ایکنجی فرضیاتده حَ حب ب < بَ اولوب امدی ح زاویه‌سی جیبله معلوم اوله‌رق ایکی قیمت حاصل ایدرکه بریسی ٩٠° دن کوچك ب حَ د دیکری آنك متممی اولان حً زاویه‌لریدر اوچنجی د زاویه‌سی دخی د = ١٨٠° — (ب + حَ) یاخود د = ١٨٠° — (ب + حً) اولورکه بو حالده اکر ب + حَ < ١٨٠° اولور ایسه مسئله ایکی وجهله

حل اولنمغله اشبو شرط اخیرك قنغی حاللرده موجود اولدیغنك تفتیشنه لزوم کوریلور.

حال (١) — ٮ زاویه‌سنك قائمه یاخود منفرجه بولنمسیدر. حً زاویه‌سی منفرجه اولدقجه قیمتی تقدیر اولنمیوب و حَ زاویه‌سی حل اولنه‌بیلمك ایچون دخی ٮ + حَ > ١٨٠° اولمسی لازم کلور بوندن حَ > ١٨٠° — ٮ وبوندندخی حس حَ > حس ٮ یاخود حً زاویه‌سی $\frac{\text{حَ حس ٮ}}{\text{ٮَ}}$ قیمتیله محلنه وضع واختصار اولندقده ٮَ > حَ اولور.

امدی زاویهٔ معلومه قائمه یاخود منفرجه اولمسیله یالکز بردرلو حلی اولوب حل مسئله‌ده ٮَ > حَ وجهله ظهور ایدر.

حال (٢) — (ٮ) زاویه‌سنك حاده بولنمسیدر. بوصورتده ٮ + حَ > ١٨٠° شرطی بولنه‌بیله‌جکندن (حَ) نك قیمتی دائما صورت مناسبه‌ده ظهور ایدر ط زاویه‌سنك قیمته کلنجه اکر ٮ + حً > ١٨٠° اولوز ایسه کذلك حً دخی مناسب وجهله حل اولنه‌جغندن حً > ١٨٠° — ٮ ویا حس ٮ > حس حً اولور. بوندن دخی حال (١) ده اولدیغی مثللو ٮَ > حَ اولور اشبو نهایتکی شرط موجود اولدقجه مسئله‌نك ایکی وعکسی حالده بروجهله حلی بولنه‌رق ٮَ > حَ اولور.

امدی زاویهٔ معلومه حاده اولدیغی وقتده مسئله‌نك حلنده دائما صعوبت بولنمز لکن ٮَ > حَ اولمدقجه ایکی درلو حلی

قبول ایتمز واشبو ایکی درلو اولان حل مسئله $\acute{ب} = \acute{ح}$ حس ب
مثللو حل واحده منجر اولور .

اجمال — اکر زاویهٔ معلومه حاده وقارشوسنده بولنان ضلع ضلع مجاورندن کوچك اوله‌رق واقع اولور ایسه بردرلو حلی اولور . بو حالده حسابه شروع اولنمزدن اقدم بیهوده اشتغالدن اجتناب ایچون مسئله‌نك معلومات معطیه‌سنی امتحان ایتمك اهمدر .

$\acute{ء}$ مقدارینه نسبتله حل اولنمش $\acute{ب}^{2} = \acute{ح}^{2} + \acute{ء}^{2} - 2\acute{ح}\acute{ء} \times$ جس ب معادله‌سنك مناقشه‌سنده اشبو نتایج مسروده بولنه‌بیلورکه (مثلثك ۳٤۸ مسئله‌سنده کوریله‌جکدر) .

**٦٥** احتمال ۳ — $\acute{ب}$ ، $\acute{ح}$ ضلعلریله بینلرنده واقع (ء) زاویه‌سنك معلوماتیله مثلثك مجهولات باقیه‌سنی استخراج ایتمك مطلوبدر . ء زاویه‌سی دیکر ایکی زاویه مجموعنك متممی اولوب اشبو ایکی زاویهٔ مجهوله‌نك مجموعلری معلوم اولدیغندن فضللرینك تعیننه احتیاج حاصل اولمغله بناء علیه $\frac{\acute{ب}}{\text{حس ب}} = \frac{\acute{ح}}{\text{حس ح}}$

اولوب (ماده ٤۱ دستور ۲۸) $\frac{\acute{ب} - \acute{ح}}{\acute{ب} + \acute{ح}} = \frac{\text{حس ب} - \text{حس ح}}{\text{حس ب} + \text{حس ح}} =$

$\frac{\text{مم} \frac{1}{2} (ب - ح)}{\text{مم} \frac{1}{2} (ب + ح)}$ اولور .

امدی $\frac{1}{2}$ (ب + ح) $= 90^{\circ} - \frac{1}{2}$ ء اولدیغندن

م $\frac{1}{2}$ (ب + ج) = عم $\frac{1}{2}$ د اولمغله بو صورتده م $\frac{1}{2}$ (ب — ج) = $\frac{\text{بَ — جَ}}{\text{بَ + جَ}}$ عم $\frac{1}{2}$ د اولورکه $\frac{1}{2}$ (ب + ج)، $\frac{1}{2}$ (ب — ج) قیمتلری معلوم اولدقدنصکره آنلری برکره جمع وبرکره طرح ایله ب ، ج زاویه‌لرندن هر بری دخی تعیین اولنور.

الحاصل دَ ضلعی دخی دَ = $\frac{\text{بَ حس د}}{\text{حس ب}}$ دستوریله حساب اولنور .

**٦٦** — دَ ضلعنی تعیین ایدن دَ = $\frac{\text{بَ حس د}}{\text{حس ب}}$ دستورینك حسابنده اوچ مقدارك لغارتمه‌سنه ایکی لغارتمه ایله حساب اولنه‌بیله‌جك وجهله بروجه زیر لزوم کوریله‌جکندن دستور مذکور یالکز هیئت آخره ارجاع ایدیلور.

شویله‌که :

$$\frac{\text{دَ}}{\text{حس د}} = \frac{\text{جَ}}{\text{حس ج}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حس ب}} \text{ مناسباتندن}$$

$$\frac{\text{دَ}}{\text{حس د}} = \frac{\text{بَ + جَ}}{\text{حس ب + حس ج}} \text{ یاخود}$$

$$\frac{\text{دَ}}{\text{۲ حس } \frac{1}{2} \text{ د تجس } \frac{1}{2} \text{ د}} =$$

$$\frac{\text{بَ + جَ}}{\text{۲ حس } \frac{1}{2} \text{ (ب + ج) تجس } \frac{1}{2} \text{ (ب — ج)}} \text{ اولور .}$$

امدی $\frac{١}{٢}(\text{ب}+\text{ج}) = ٩٠^\circ - \frac{١}{٢}\text{د}$ اولدیغندن $\text{حس}\,\frac{١}{٢}(\text{ب}+\text{ج}) = \text{تحس}\,\frac{١}{٢}\text{د}$ اولمغله مساویلر محلنه وضع اولندقده

$$\frac{\acute{\text{د}}}{\text{حس}\,\frac{١}{٢}\text{د}} = \frac{\acute{\text{ب}}+\acute{\text{ج}}}{\text{تحس}\,\frac{١}{٢}(\text{ب}-\text{ج})}$$

اولوب مطلوب حاصل اولور.

تنبیه — عملیاتده اکثریا وقوعبولدیغی کبی $\acute{\text{ب}}$ ، $\acute{\text{ج}}$ ضلعلرینك یالکز لغارتمه‌لری معلوم اوله‌رق ویریلور ایسه بو حالده مذکور ضلعلری تکرار حساب ایتمکدن اجتناباً بروجه بالا دستور اختصار ایدیلور.

$$\text{م}\,\frac{١}{٢}(\text{ب}-\text{ج}) = \frac{\acute{\text{ب}}-\acute{\text{ج}}}{\acute{\text{ب}}+\acute{\text{ج}}}\,\text{تم}\,\frac{١}{٢}\text{د}$$

$$= \frac{١-\frac{\acute{\text{ج}}}{\acute{\text{ب}}}}{١+\frac{\acute{\text{ج}}}{\acute{\text{ب}}}}\,\text{تم}\,\frac{١}{٢}\text{د}$$

دستورنده $\frac{\acute{\text{ج}}}{\acute{\text{ب}}} = \text{م}\,\text{ه}$ فرضیله (ه متوسط زاویه‌در) محلنه وضع اولندقده

$$\text{م}\,\frac{١}{٢}(\text{ب}-\text{ج}) = \frac{١-\text{م}\,\text{ه}}{١+\text{م}\,\text{ه}}\,\text{تم}\,\frac{١}{٢}\text{د} =$$

$$= \frac{\text{م}\,٤٥^\circ-\text{م}\,\text{ه}}{\text{م}\,٤٥^\circ+\text{م}\,\text{ه}}\,\text{تم}\,\frac{١}{٢}\text{د}$$ یاخود $$\text{م}\,\frac{١}{٢}(\text{ب}-\text{ج}) =$$

مم ($٤٥^\circ$ — ھ) × ممم $\frac{١}{٢}$ ء بولنورکه (اصول حسابی تطبیقات بحثنده کوریله‌جکدر .)

**٦٧** احتمال ٤ — برمثلثك اعطا اولنان بَ ، حَ ، ءَ مثللو اضلاع ثلثه‌سی واسطه‌سیله زوایای ثلثه‌سنك تعیینی مطلوبدر.

زوایای مذکوره (ماده ٦٠) ده استخراج اولنان دستور واسطه‌سیله مثلا $بَ^٢ = حَ^٢ + ءَ^٢ - ٢ حَ ءَ$ تجب ب دستوریله

تجب ب $= \frac{حَ^٢ + ءَ^٢ - بَ^٢}{٢ حَ ءَ}$ تعیین اولنوب اشبو معادله‌یی لغارتمه ایله حل اولنه‌جق برصورته ارجاع ایتمك ایچون طرفینه واحد ضم اولندقده

$$١ + \text{تجب ب} = ١ + \frac{حَ^٢ + ءَ^٢ - بَ^٢}{٢ حَ ءَ}$$

$$= \frac{حَ^٢ + ٢ حَ ءَ + ءَ^٢ - بَ^٢}{٢ حَ ءَ} \text{ یاخود}$$

$$١ + \text{تجب ب} = \frac{(حَ + ءَ)^٢ - بَ^٢}{٢ حَ ءَ}$$

$$= \frac{(حَ + ءَ + بَ)(حَ + ءَ - بَ)}{٢ حَ ءَ} \text{ اولور.}$$

لکن ١ + تجب ب = ٢ تجب$^٢$ $\frac{١}{٢}$ ب اولدیغندن محلنه وضع ایله ٢ تجب$^٢$ $\frac{١}{٢}$ ب $= \frac{(حَ + ءَ + بَ)(حَ + ءَ - بَ)}{٢ حَ ءَ}$

طرفین (٢) ایله تقسیم وجذری اخذ اولندقده تجب $\frac{١}{٢}$ ب =

$\sqrt{\frac{(\text{جَ} + \text{ءَ} + \text{بَ})\,(\text{جَ} + \text{ءَ} - \text{بَ})}{٤\ \text{جَ}\ \text{ءَ}}}$ اولوب مثلثك اضلاع ثلثه‌سی ۲ ه فرضیله $\text{جَ} + \text{ءَ} + \text{بَ} = ۲\ \text{ه}$ وكذا $\text{جَ} + \text{ءَ} - \text{بَ} = ۲\,(\text{ه} - \text{بَ})$ وبنه $\text{بَ} + \text{ءَ} - \text{جَ} = ۲\,(\text{ه} - \text{جَ})$ وبنه $\text{بَ} + \text{جَ} - \text{ءَ} = ۲\,(\text{ه} - \text{ءَ})$ اولملریله استخراج اولنان دستورده محللرینه وضع اولنملریله

$$\left.\begin{aligned} \text{تجب}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{ب} &= \sqrt{\frac{\text{ه}\,(\text{ه} - \text{بَ})}{\text{جَ}\ \text{ءَ}}} \\ \text{تجب}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{ج} &= \sqrt{\frac{\text{ه}\,(\text{ه} - \text{جَ})}{\text{بَ}\ \text{ءَ}}} \\ \text{تجب}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{ء} &= \sqrt{\frac{\text{ه}\,(\text{ه} - \text{ءَ})}{\text{بَ}\ \text{جَ}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (۱)$$

بركره‌ده طرفين معادله واحددن طرح اولندقده

$$۱ - \text{تجب}\ \text{ب} = ۱ - \frac{\text{جَ}^{۲} + \text{ءَ}^{۲} - \text{بَ}^{۲}}{۲\ \text{جَ}\ \text{ءَ}}$$

$$= \frac{\text{بَ}^{۲} - \text{جَ}^{۲} - \text{ءَ}^{۲} + ۲\ \text{جَ}\ \text{ءَ}}{۲\ \text{جَ}\ \text{ءَ}}$$ یاخود

$$۱ - \text{تجب}\ \text{ب} = \frac{\text{بَ}^{۲} - (\text{جَ} - \text{ءَ})^{۲}}{۲\ \text{جَ}\ \text{ءَ}}$$

$$= \frac{(\text{بَ} + \text{جَ} - \text{ءَ})\,(\text{بَ} + \text{ءَ} - \text{جَ})}{۲\ \text{جَ}\ \text{ءَ}}$$ اولوب

بورادن دخی $\text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{ب} = \sqrt{\frac{(\text{بَ} + \text{جَ} - \text{ءَ})\,(\text{بَ} + \text{ءَ} - \text{جَ})}{٤\ \text{جَ}\ \text{ءَ}}}$

ویاخود

$$\text{حس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ب} = \sqrt{\frac{(\text{ه} - \text{ح}')(\text{ه} - \text{د}')}{\text{ح}'\ \text{د}'}}$$

وكذا عین وجهله تعیین اولندقده

$$\text{حس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ح} = \sqrt{\frac{(\text{ه} - \text{ب}')(\text{ه} - \text{د}')}{\text{ب}'\ \text{د}'}} \qquad \ldots\ldots (٢)$$

$$\text{حس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{د} = \sqrt{\frac{(\text{ه} - \text{ب}')(\text{ه} - \text{ح}')}{\text{ب}'\ \text{ح}'}}$$

دستورلری حاصل اولور.

(٢) ایله مرقم دستورلر (١) ایله مرقم دستورلر اوزرینه تقسیم اولندقده

$$\text{م}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ب} = \sqrt{\frac{(\text{ه} - \text{ح}')(\text{ه} - \text{د}')}{\text{ه}\ (\text{ه} - \text{ب}')}}$$

$$\text{م}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ح} = \sqrt{\frac{(\text{ه} - \text{ب}')(\text{ب} - \text{د}')}{\text{ه}\ (\text{ه} - \text{ح}')}} \qquad \ldots\ldots (٣)$$

$$\text{م}\ \tfrac{1}{2}\ \text{د} = \sqrt{\frac{(\text{ه} - \text{ب}')(\text{ه} - \text{ح}')}{\text{ه}\ (\text{ه} - \text{د}')}}$$

دستورلری حاصل اولور.

تنبیه ١ — اشبو دستورلرك كافه‌سنده‌كی جذرلر مثبت اشارتلریله قبول اولنور چونكه هر قنغی بر مثلثك زاویه‌لرندن برینك نصفی بهمه حال ٩٠ درجه‌دن كوچك وبونكله برابر برنجی ربع داخلنده‌كی مثلثات خطلرینك جمله‌سی مثبتدر.

اكر يالكز بر زاويه‌سى تعيين اولنمق استه‌نيلور ايسه (۱) و (۲) ويا (۳) رقملريله كوستريلان دستورلر ايله استخراج اولنور فقط اوچ زاويه‌سيده حساب ايدلمك استنلديكى حالده بونك ايچون التى وياخود يدى لغارتمه قوللانمقدن ايسه (ماده ۵۰ تنبيه ۱) مقتضياتندن اوله‌رق نتايج مكمله حاصل ايدن ودرت لغارتمه ايله حساب ايديلان (۳) ايله مرقم دستورلرى استعمال ايتمك مرجحدر.

تنبيه ۲ — (۳) ايله مرقم دستورلر لغارتمه‌نك حسابچون زياده قولايلقله استعمال اولنان برصورت عاديه‌ده وضع اولنه‌بيلور بونك ايچون (شكل ٤٨) اولامرده ب ح ء مثلثنك داخلنه مرسوم دائره‌نك ( ر ) نصف قطرينك تعيينى اقتضا ايدر.



(شكل ٤٨)

بناءً عليه هرقنغى بردائره‌يه خارج برنقطه‌دن رسم اولنان خط مماسلر ب ق = ب ط ، ح ق = ح ل ، ء ل = ء ط اولوب بعده ب ق = (ب ق + ء ل + ح ل) — ح ء ياخود ب ق = ه — ىَ اولور لكن ب م ق مثلث قائم الزاويه‌سنده زاويهٔ ق ب م = $\frac{۱}{۲}$ ب اولديغندن م ق = ب ق مم ق ب م ياخود ر = (ه — ىَ) مم $\frac{۱}{۲}$ ب اولوب اشبو معادله‌دن دخى مم $\frac{۱}{۲}$ ب = $\frac{ر}{ه - ىَ}$ اولور.

م $\frac{1}{2}$ ح = ر / (ه — حَ) ، م $\frac{1}{2}$ د = ر / (ه — دَ) اولور.

اشبو دستورلر انجق (٣) ايله مرقم دستورلر اولوب

بوصورتله ر = √( (ه — بَ) (ه — حَ) (ه — دَ) / ه )

استخراج اولنور .

**٦٨** مناقشه — (١) و (٢) و (٣) ايله مرقم دستورلرده هر جذر تحتنده بولنان قيمت مثبت وبوندن فضله (١) و (٢) رقملرنده كوستريلان دستورلرده‌كى قيمت واحددن كوچكدر .

امدى بَ ، حَ ، دَ وبونلرك مجموعنك نصفى اولان ه مثبت اوله‌رق اكر سائر حدلر مثبت وياخود اكر ايكى حدى منفى اولورلر ايسه شرط صحيح اجرا اولنمش اولور فقط بوايكنجى فرض غير قابلدر چونكه مثلا: ه — بَ < ٠ ، ه — حَ < ٠ . فرض ايديله‌جك اولور ايسه بوندن ٢ ه < بَ + حَ يعنى بَ + حَ + دَ < بَ + حَ وياخود دَ < ٠ اولمق اقتضا ايدركه بوايسه غير ممكندر. بوسببله ه — بَ < ٠ ، ه — حَ < ٠ ، ه — دَ < ٠ . ياخود بَ < حَ + دَ ، حَ < بَ + دَ ، دَ < بَ + حَ اولمق لازم كلور .

(وبوجهتله بر مثلثك حلى ايچون اقتضا ايدن شرط تحقق ايدر)

حس $\frac{1}{2}$ ب تعبير ثانيسنه كلنجه مثلا تعبير مذكور واحددن اصغر اولسه (ه — حَ) (ه — دَ) / حَ دَ < ١ ياخود (ه — حَ) ×

(هـ — دَ) > حَ دَ يعنى هـ٢ — هـ × (حَ + دَ) + حَ دَ > حَ دَ
ياخود بالاختصار و هـ ايله تقسيم اولندقده هـ — (حَ + دَ) > ٠
ياخود بَ > حَ + دَ اولمسى لازمكلور .

وينه بويله‌جه بحث ١/٢ ب تعبيرى واحددن اصغر اولسه هـ (هـ — بَ) / حَ دَ > ١ ياخود هـ (هـ — بَ) > حَ دَ بورادە هـ كندى قيمتيله وضع اولندقده (بَ + حَ + دَ) × (حَ + دَ + بَ) > ٤ حَ دَ وياخود (حَ + دَ)٢ — بَ٢ > ٤ حَ دَ وياخود (حَ + دَ)٢ — ٤ حَ دَ > بَ٢ اولوب الحاصل (حَ — دَ)٢ > بَ٢ اوله‌رق بورادن دخى حَ — دَ > بَ يا حَ > بَ + دَ ياخود دَ — حَ > بَ وياخود دَ > بَ + حَ اولمق اقتضـا ايدركه مثلث اضلاع ثلثه‌سـنك اشبو خاصه‌سى هندسهٔ عاديه ايله دخى مثبتدر.

# « باب ثالث »

## « مثلثلرك سطحی »

**٦٩** — مثلا (شکل ٤٩) (ب ح ء) مثلثك مساحهٔ سطحیه‌سنی تعیین ایتمك مطلوب اولسه رأسندن قاعده‌سی اوزرینه ب و عمودی تنزیل ومثلثك مساحهٔ سطحیه‌سی (س) حرفیله ارائه اولندقده س $=$ $\frac{١}{٢}$ بَ $\times$ ب و اولور.

(شکل ٤٩)

امدی ب و ء مثلث قائم الزاویه‌سنده ب و $=$ حَ $\times$ حس ء اولمغله محانه وضع ایله س $=$ $\frac{١}{٢}$ بَ $\times$ حَ حس ء (١) اولور.

(اشبو دستور مثلثلرك حلنك اوچنجی احتمالنی کوستر).

بو صورتده عمومیتله بر مثلثك مساحهٔ سطحیه‌سی ایکی ضلعنك مستطیلنك بینلرنده واقع زاویه جیبنه حاصل ضربنك نصفنه مساوی اولور.

**٧٠** — (١) دستورنده حَ محلنه حَ $=$ $\frac{\text{بَ حس ح}}{\text{حس ب}}$ وضع اولندقده س $=$ $\frac{١}{٢}$ بَ$^{٢}$ $\frac{\text{حس ح حس ء}}{\text{حس ب}}$ اولور. حالبوکه

حس ب = حس (ح + د) اولديغندن

$$\text{س} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{بَ}^{\text{۲}} \times \frac{\text{حس ح حس د}}{\text{حس (ح+د)}} \quad \ldots\ldots (\text{۲})$$

(اشبو دستور مثلث مائل الزاويانك حلندهكى برنجى احتمالى كوسترر).

عموميتله بر مثلثك مساحهٔ سطحيهسى اضلاعندن برينك مربع نصفنك ضلع مذكورك مجاور زاويهلرى جيبلرينك مستطيلنك مذكور زاويهلر مجموعنك جيبيله اولان خارج قسمته حاصل ضربنه مساوى اولور.

**٧١** — هر قنغى بر مثلثك مساحهٔ سطحيهسنى اعطا ايدن $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ حَ دَ حس ب دستورنده حس ب حدى محلنه مساويسى اولان ۲ حس $\frac{\text{ب}}{\text{۲}}$ جتس $\frac{\text{ب}}{\text{۲}}$ وضع اولندقده س = حَ دَ × حس $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ ب × جتس $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ ب اولور.

امدى (ماده ٦٧) ده كورلديكى اوزره

$$\text{حس } \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{ب} = \sqrt{\frac{(\text{ه} - \text{حَ})\,(\text{ه} - \text{دَ})}{\text{حَ دَ}}}$$

$$\text{جتس } \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{ب} = \sqrt{\frac{\text{ه}\,(\text{ه} - \text{بَ})}{\text{حَ دَ}}}$$ اولمريله محللرينه

قونلدقده

$$\text{س} = \text{حَ دَ} \sqrt{\frac{\text{ه}\,(\text{ه} - \text{بَ})\,(\text{ه} - \text{حَ})\,(\text{ه} - \text{دَ})}{\text{حَ دَ}}} =$$

$$\sqrt{\text{ه}\,(\text{ه} - \text{بَ})\,(\text{ه} - \text{حَ})\,(\text{ه} - \text{دَ})} \quad \ldots\ldots (\text{۳})$$ اولور.

اشبو دستور مثلث مائل الزاویه‌نك حلنده‌كی دردنجی احتمالی كوستركه احتمال مذكور (ماده ٦٨) ده مناقشه اولنمشدر.

**۷۲** — مجموع اضلاع وزوایاسی معلوماتیله بر مثلثك سطحی مطلوب اولسه (ماده ٦٧) ده بیان اولنان (۳) ایله مرقم

$$\text{م}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ب} = \sqrt{\frac{(\text{ه}-\text{ج}')(\text{ه}-\text{د}')}{\text{ه}\,(\text{ه}-\text{ب}')}}$$

$$\text{م}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج} = \sqrt{\frac{(\text{ه}-\text{ب}')(\text{ه}-\text{د}')}{\text{ه}\,(\text{ه}-\text{ج}')}}$$

$$\text{م}\ \tfrac{1}{2}\ \text{د} = \sqrt{\frac{(\text{ه}-\text{ب}')(\text{ه}-\text{ج}')}{\text{ه}\,(\text{ه}-\text{د}')}}$$

دستورلری ضرب اولندقده $\text{م}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ب}\ \text{م}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج}\ \text{م}\ \tfrac{1}{2}\ \text{د} =$

$$= \sqrt{\frac{(\text{ه}-\text{ب}')(\text{ه}-\text{ج}')(\text{ه}-\text{د}')}{\text{ه}^{3}}} =$$

$$\frac{1}{\text{ه}^{2}}\sqrt{\text{ه}\,(\text{ه}-\text{ب}')(\text{ه}-\text{ج}')(\text{ه}-\text{د}')}$$

اولوب طرفین معادله $\text{ه}^{2}$ ایله ضرب وجذریه محلنه س (مثلثك مساحه‌سی) وضع اولندقده $\text{س} = \text{ه}^{2}\ \text{م}\ \tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{م}\ \tfrac{1}{2}\text{ج} \times \text{م}\ \tfrac{1}{2}\ \text{د}$ اولور. یعنی بر مثلثك مساحهٔ سطحیه‌سی نصف مجموع اضلاعنك مربعنك زوایای ثلثه‌سنك نصف مماسلرینك مستطیلنه حاصل ضربنه مساوی اولور.

تنبیه — مثلث قائم الزاویه‌نك مساحه‌سی $\text{س} = \tfrac{1}{2}\ \text{ج}'\ \text{د}'$،

$$\text{س} = \frac{\text{ب}'^{2}\ \text{حب}\ ۲\ \text{ج}}{٤}\ ،\ \text{س} = \frac{\text{ج}'^{2}\ \text{عم}\ \text{ج}}{۲}$$

دستورلریله حساب اولنور.

## امثلهٔ عدديه بيانى

معلومات:

بَ = ٤٥٦٢ ذراع اعشارى

ﺣ = ٢″ ٤٥′ ٣٥°

د = ٤٠″ ٢٧′ ٤٢°

ب = ١٨٠° — (ﺣ + د) = ٤٧′ ١٠١°

## دستورلر

ﺣَ = (بَ حس ﺣ) / (حس ب) | لع ﺣَ = لع ب + لع حس ﺣ + لعَ حس ب

ﺣَ = (بَ حس د) / (حس ب) | لع دَ = لع بَ + لع حس د + لعَ حس ب

| | |
|---|---|
| لع بَ = ٣,٦٥٩١٥٥٣ | لع بَ = ٣,٦٥٩١٥٥٣ |
| لع حس ﺣ = ١,٧٦٦٦٥٧٦ | لع حس د = ١,٨٢٩٣٦١٥ |
| لعَ حس ب = ٠,٠٠٩٢٤٩٨ | لعَ حس ب = ٠,٠٠٩٢٤٩٨ |
| ٣,٤٣٥٠٦٢٧ | ٣,٤٩٧٧٦٦٦ |
| مترو ﺣَ = ٢٧٢٣,٠٩٤ | مترو دَ = ٣١٤٦,٠٦ |

س = ١/٢ بَ٢ (حس ﺣ حس د) / (حس ب) مساحه‌سنك حسابى

لع س = ٢ لع بَ + لع حس ح + لع حس د + لعَ حس ب + لعَ ٢

٢ لع بَ = ٧,٣٩٠٣١٠٦

لع حس ح = ١̄,٧٦٦٦٥٧٦

لع حس د = ١̄,٨٢٩٣٦١٥

لعَ حس ب = ٠,٠٠٩٢٤٩٨

لعَ ٢ = ١̄,٦٩٨٩٧٠٠

٦,٦٢٢٥٤٩٥

س = ٤١٩٣٢٣٠ متره مربعی یاخود ٤١٩ هکتار ٣٢ ر ٣٠ سانتیار اولور .

احتمال ٢

معلومات:
بَ = ٩٤٨ متره
جَ = ١٢٥٠ متره
ب = ١٢° ١٣′ ٢٠″ (ب < ٩٠° و بَ < جَ

ایکی صورتله حل اولنور)

دستورلر:
حس ح = جَ حس ب / بَ ، لع حس ح = لع جَ + لع حس ب + لعَ بَ
د = ١٨٠° − (ب + ح)
دَ = بَ حس د / حس ب ، لع دَ = لع بَ + لع حس د + لعَ حس ب

لع حَ = ٣,٠٩٧١٥٣١

لع حس بَ = ١,٣٢٥٧٢٨٨

لعَ بَ = ٣,٠٢٣١٩١٧

١,٤٤٦٠٧٣٦

حَ = ٦,٧ ,, ١٣ ,, ١٦ حً = ٣٥٠٣ ,, ٤٦ ,, ١٦٣

دَ = ٣٣,٣ ,, ٣٣ ,, ١٥١ دً = ٤٦,٧ ,, ٥٩ ,, ٣٠٠

حل اول حل ثانی

لع بَ = ٢,٩٧٦٨٠٨٣ ٢,٩٧٦٨٠٨٣

لع حس د = ١,٦٧٧٨٣٤٧ یاخود ٢,٨٤٣١٨٣٩

لعَ حس ب = ٠,٦٧٤٢٧١٢ ٠,٦٧٤٢٧١٢

٣,٣٢٨٩١٤٢ یاخود ٢,٤٩٤٢٦٣٤

دَ = ٢١٣٢,٦٢١ متره یاخود ٣١٢,٠٧٨٢ متره اولور.

س = $\frac{١}{٢}$ بَ حَ حس د مثلثك مساحه‌سنك حسابی

لع س = لع بَ + لع حَ + لع حس د + لعَ ٢

لع بَ = ٢,٩٧٦٨٠٨٣ ٢,٩٧٦٨٠٨٣

لع حَ = ٣,٠٩٧١٥٣١ ٣,٠٩٧١٥٣١

لع حس د = ١,٦٧٧٨٣٤٧ یاخود ٢,٨٤٣١٨٣٩

لعَ ٢ = ١,٦٩٨٩٧٠٠ ١,٦٩٨٩٧٠٠

٥,٤٥٠٧٦٦١ یاخود ٤,٦١٦١١٥٣

س = ٢٨,٢٣٣٦ متره مربعی یاخود ٤١٣١٥,٧١ متره مربعی

احتمال ٣

معلومات
- بَ = ٢٤٨٣٥,٣٦ متره
- حَ = ١٨٩٤٧,٢٤ متره
- د = ٣٥° ٤٢′ ٢٦,٤٢″ (١٨٦٧ تاریخنده فرانسه صنایع مکتبنده صوریلان سؤالدر)

حساب متوسط
- بَ + حَ = ٤٣٧٨٢,٦٠
- بَ − حَ = ٥٨٨٨,١٢
- ½ د = ١٧° ٥١′ ١٣,٢١″

دستورلر
- مم ½ (ب − ح) = (بَ − حَ) / (بَ + حَ) مم ½ د
- لع مم ½ (ب − ح) = لع (بَ − حَ) + لعَ (بَ + حَ) + لع مم ½ د

- دَ = بَ حس د / حس ب یاخود
- دَ = (بَ + حَ) حس ½ د / محس ½ (ب − ح)

لع (بَ − حَ) = ٣,٧٦٩٩٧٦٧

لعَ (بَ + حَ) = ٥̅,٣٥٨٦٩٨٤

لع مم ½ د = ٠,٤٩٢٩١١٣

---

١̅,٦٢٠٦٨٦٤

$\frac{1}{2}$ (ب — ح) = ٤٣ً، ٣٩َ، ٢٢°

$\frac{1}{2}$ (ب + ح) = ٧٩، ٤٦ً، ٨َ، ٧٢°

ب = ٧٩,٢٩، ٤٨، ٩٤، ح = ٧٩، ٣ً، ٢٩َ، ٣٩° اولور

دَ نك حسابى

لع (بَ + حَ) = ٤,٦٤١٢٩٥٦

لع حس $\frac{1}{2}$ د = ١,٤٨٦٥٥٣٨

لعَ محس $\frac{1}{2}$ (ب — ح) = ٠,٠٣٤٨٩٦٦

٤,١٦٢٧٤٦٠

دَ = ١٤٥٤٥,٩٥ متره مربعى اولور.

س = $\frac{1}{2}$ حَ بَ حس د ك حسابى

لع بَ = ٤,٣٩٥٠٧٠٥

لع حَ = ٤,٢٧٧٥٤٥٩

لع حس د = ١,٧٦٦١٤٨٩

لعَ ٢ = ١,٦٩٨٩٧٠٠

س = ١٣٧٧٣٢٠٥٠٠ متره مربعى اولور.

احتمال ٤

معلومات:
ب = ٢٣٥،٦٨٤ متره
ح = ٤١٢،٥٦٧ متره
د = ٥٣١،٦٤٨ متره

حساب متوسطه:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ه = ٥٩٩،٩٤٩٥ | لغارتمه‌سی | ٢,٦٩٨٩٢٦٢ |
| ه − ب = ٢٦٤،٢٦٥٤ | كذا | ٢,٤٢٢٠٤٠٥ |
| ه − ح = ٨٧،٣٦٢٥ | كذا | ١,٩٤١٤٢٤٥ |
| ه − د = ١٤٨،٣٠١٥ | كذا | ٢,١٧١١٤٥٦ |

٢ لع ر = ٣,٨٥٣٦٨٤٤
لع ر = ١,٩١٧٨٤١٢

| برنجی اصول | ایکنجی اصول |
|---|---|
| $\text{مم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ب} = \sqrt{\dfrac{(\text{ه}-\text{ح})(\text{ه}-\text{د})}{\text{ه}(\text{ه}-\text{ب})}}$ | $\text{مم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ب} = \dfrac{\text{ر}}{\text{ه}-\text{ب}}$ |
| $\text{مم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ح} = \sqrt{\dfrac{(\text{ه}-\text{ب})(\text{ه}-\text{د})}{\text{ه}(\text{ه}-\text{ح})}}$ | $\text{مم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ح} = \dfrac{\text{ر}}{\text{ه}-\text{ح}}$ |
| $\text{مم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{د} = \sqrt{\dfrac{(\text{ه}-\text{ب})(\text{ه}-\text{ح})}{\text{ه}(\text{ه}-\text{د})}}$ | $\text{مم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{د} = \dfrac{\text{ر}}{\text{ه}-\text{د}}$ |

ب تك حسابى

لعَ(ه — حَ) = ١,٩٤١٤٢٤٥

لع (ه — ءَ) = ٢,١٧١١٤٥٦

لعَ ه = ٣,٣٠١٠٧٣٨

لعَ(ه — بَ) = ٣,٥٧٧٩٥٩٥

٢,٩٩١٦٠٣٤

لع مم ½ ب = ١,٤٩٥٨٠١٧

½ ب = ١٧° ٢٣′ ٢٣,٢٩″

ب = ٣٤° ٤٦′ ٤٦,٥٨″

ح مك حسابى

لع(ه — بَ) = ٢,٤٢٢٠٤٠٥

لع (ه — ءَ) = ٢,١٧١١٤٥٦

لعَ ه = ٣,٣٠١٠٧٣٨

لعَ(ه — حَ) = ٢,٠٥٨٥٧٥٥

١,٩٥٢٨٣٥٤

لع مم ½ ح = ١,٩٧٦٤١٧٧

½ ح = ٤٣° ٢٦′ ٤٢,٦٣″

ح = ٨٦° ٥٣′ ٢٥,٦″

ب تك حسابى

لع س = ١,٩١٧٨٤٢٢

لعَ (ه — ءَ) = ٣,٥٧٧٩٥٩٥

١,٤٩٥٨٠١٧

½ ب = ١٧° ٢٣′ ٢٣,٢٩″

ب = ٣٤,٤٦,٤٦,٥٨

ح مك حسابى

لع س = ١,٩١٧٨٤٢٢

لعَ(ه — حَ) = ٢,٠٥٨٥٧٥٥

١,٩٧٦٤١٧٧

½ ح = ٤٣° ٢٦′ ٤,٦٣″

ح = ٨٦° ٥٣′ ٢٥,٢٦″

(د) ك حسابی

لع(ﻫ — ب) = ٢,٤٢٢٠٤٠٥

لع(ﻫ — ج) = ١,٩٤١٤٢٤٥

لعَ ﻫ = ٣,٣٠١٠٧٣٨

لعَ (ﻫ — د) = ٣,٨٢٨٨٥٤٤

---

١,٤٩٣٣٩٣٢

لع جم ١/٢ د = ١,٧٤٦٦٩٦٦

١/٢ د = ٢٩° ٩′ ٥٤,٠٨″

د = ٥٨° ١٩′ ٤٨,١٦″

د ك حسابی

لع ر = ١٩١٧٨٤٢٢

لعَ (ﻫ — د) = ٢,٨٢٨٨٥٤٤

---

١,٧٤٦٦٩٦٦

١/٢ د = ٢٩° ٩′ ٥٤,٨″

د = ٥٨° ١٩′ ٤٨,١٦″

س = √(ﻫ(ﻫ — ب) (ﻫ — ج) (ﻫ — د))، س = ﻫ ر معادله‌سنك

معادله‌سنك حسابی

لع ﻫ = ٢,٦٩٨٩٢٦٢

لع(ﻫ — ب) = ٢,٤٢٢٠٤٠٥

لع(ﻫ — ج) = ١,٩٤١٤٢٤٥

لع (ﻫ — د) = ٢,١٧١١٤٥٦

---

٩,٢٣٣٥٣٦٨

لع س = ٤,٦١٦٧٦٨٤

حسابی

لع ر = ١,٩١٧٨٤٢٢

لع ﻫ = ٢,٦٩٨٩٢٦٢

---

٤,٦١٦٧٦٨٤

س = ٤١٣٧٧,٨٩ متره مربعی

تحقیق ب + ج + د = ١٨٠°

س = ٤١٣٧٧,٨٩ متره مربعی اولمش اولور.

## ﴿ تطبيقات ﴾

(۱) مثلثك اضلاعيله زاويه‌سی بيننده تحصيل اولنان

$\frac{\text{بَ}}{\text{حس ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{حس ج}} = \frac{\text{دَ}}{\text{حس د}}$ مناسباتی مثلثك خارجنه مرسوم

دائره‌نك قطرينی اشعار ايتدكلرينك اثباتی مطلوبدر (شكل ٥٠) مثلثك هر قنغی ج رأسيله مرور جـ بَ قطری رسم اولندقده

جـ بَ د مثلث قائم الزاويه‌سنده جد = ۲ ر × حس بَ اولور (م جـ = ر فرض اولنمشدر) ب، بَ زاويه‌لری مساوی اولديغندن بَ = ۲ ر حس ب ياخود

(شكل ٥٠)

$\frac{\text{بَ}}{\text{حس ب}} = ۲\,\text{ر}$ اولور

وبو مثللو اثبات اولنوركه $\frac{\text{جَ}}{\text{حس ج}} = ۲\,\text{ر}$ و $\frac{\text{دَ}}{\text{حس د}} = ۲\,\text{ر}$ اولور .

تنبيه — $\frac{\text{دَ}}{\text{حس د}} = ۲\,\text{ر}$ معادله‌سی $\text{ر} = \frac{\text{دَ}}{۲\ \text{حس د}}$

مثللو افاده اولنه‌بيلوب صورت ومخرج بَ جَ ايله ضرب اولندقده

$\text{ر} = \frac{\text{بَ جَ دَ}}{۲\ \text{بَ جَ حس د}}$ وبورادن دخی

$$\text{ر} = \frac{\text{بَ حَ دَ}}{\text{٤ س}} = \frac{\text{بَ حَ دَ}}{\text{٤}\sqrt{\text{ه}(\text{ه}-\text{بَ})(\text{ه}-\text{دَ})(\text{ه}-\text{حَ})}}$$

دستورلری معلوم بر مثلثك خارجنـه رسم اولنه‌جق دائره‌نك نصف قطرینی اعطا ایدر.

(۲) قطرلرینك وانلرك تشكیل ایتمش اولدقلری زاویه‌لرینك اعانه‌سیله بر ذواربعة الاضلاعك مساحهٔ سطحیه‌سنی تعیین ایتمك.

مثلا ب ح د ه ذواربعة الاضلاعك قطرلری س، ع، اقسام متفرقه‌سی، سَ ، سً و عَ ، عً حرفلریله كوسترلدكده ب م = سَ، م د = سً، ح م = عَ، م ه = عً اولور.

قطرلرك م تلاقی نقطه‌سنده تشكل ایدن زاویه‌لر بربرلرینك متممی اولدقلرندن جیبلری مساوی اولمغله

امدی

مساحهٔ ب م ه $= \frac{١}{٢}$ سَ عً حب م

مساحهٔ ب م ح $= \frac{١}{٢}$ سَ عَ حب م

مساحهٔ ح م د $= \frac{١}{٢}$ سً عَ حب م

مساحهٔ ه م د $= \frac{١}{٢}$ سً عً حب م اشبو معادله‌لر جمع اولندقده

مساحهٔ ب ح د ه $= \frac{١}{٢}$ (سَ + سً) (عَ + عً) حب م

یعنی مساحهٔ ب ح د ه = س $= \frac{١}{٢}$ س ع حب م اولور.

بو وجهله بر ذواربعة الاضلاعك مساحهٔ سطحیه‌سی قطرلری

مستطيلنك اولقطرلرك تشكيل ايلدكلرى هرقنغى برزاويه جيبنه حاصلضربنك نصفنه مساوى اولور.

(٣) بَ ضلعيله ب مقابل زاويه‌سى وسائر ايكى ضلعنك مجموع ويا فضلى معلوم اولان برمثلثى حل ايتمك (١٨٥٦ نيسانك ١ و ١٨٦٨ تموزينك ٢١ صوربون مكتبنده ايراد اولنمشدر).

$$\frac{\text{جَ}}{\text{حس ج}} = \frac{\text{دَ}}{\text{حس د}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حس ب}} \quad \text{مناسباتندن}$$

$$\frac{\text{جَ} + \text{دَ}}{\text{حس ج} + \text{حس د}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حس ب}} \quad \text{ياخود} \quad \frac{\text{جَ} + \text{دَ}}{\text{بَ}}$$

$$= \frac{\text{حس ج} + \text{حس د}}{\text{حس ب}} = \frac{\text{٢ حس } \tfrac{١}{٢}(\text{ج}+\text{د}) \text{ تجس } \tfrac{١}{٢}(\text{ج}-\text{د})}{\text{٢ حس } \tfrac{١}{٢}\text{ب تجس } \tfrac{١}{٢}\text{ب}} \quad \text{ياخود}$$

$$\text{حس } \tfrac{١}{٢}(\text{ج}+\text{د}) = \text{تجس } \tfrac{١}{٢}\text{ ب} \quad \text{اولمغله محلنه وضع اولندقده}$$

$$\frac{\text{جَ} + \text{دَ}}{\text{بَ}} = \frac{\text{تجس } \tfrac{١}{٢}(\text{ج}-\text{د})}{\text{حس } \tfrac{١}{٢}\text{ ب}} \quad \text{اولور.}$$

اشبو دستور ج + د مقدارينى اعطا ايتديكى كبى ج — د مقدارينى دخى اعطا ايدوب ج ، د مقدارلرى سهولتله تحصيل اولنور ومسئله اولحالده برنجى احتمال داخلنده بولنور.

اكر جَ — دَ فضلى ويرلمش اولسه ايدى بوحالده بروجه آتى دستور استعمال قلنور ايدى.

$\frac{\text{ح}' - \text{د}'}{\text{ب}'} = \frac{\text{حس ح} - \text{حس د}}{\text{حس ب}}$ بودخی اولکی دستور مثللو دوام اولنه‌رق تعیین قلنور.

(٤) بَ ضلعیله مجاور د زاویه‌سی ودیکر ایکی ضلعنک مجموع یاخود فضلی معلوم اولان مثلثی حل ایتمك.

بر موجب مسئله بَ ضلعیله حَ + دَ مجموعی معلوم اولمغله نصف مجموع ه اولور ایسه ه − بَ دخی معلوم دیمك اولور.

$$\text{امدی ظم } \tfrac{1}{2}\,\text{د} = \sqrt{\frac{(\text{ه} - \text{ب}')\,(\text{ه} - \text{ح}')}{\text{ه}\,(\text{ه} - \text{د}')}} \qquad (1)$$

$$\text{ظم } \tfrac{1}{2}\,\text{ح} = \sqrt{\frac{(\text{ه} - \text{ب}')\,(\text{ه} - \text{د}')}{\text{ه}\,(\text{ه} - \text{ح}')}} \qquad (2)$$

اشبو ایکی دستور ضرب اولندقده $\text{ظم } \tfrac{1}{2}\,\text{ح}\ \text{ظم } \tfrac{1}{2}\,\text{د} = \frac{\text{ه} - \text{ب}'}{\text{ه}}$ اشبو معادله ح زاویه‌سنك قیمتنی اعطا ایتمکله اولوقت برضلع ایله ایکی زاویه‌سی معلوم اولمش اولور.

اکر حَ − دَ فضلی ویریله‌جك اولور ایسه بو حالده حً ، ه − دً معلوم اوله‌جقلرندن (۱) و (۲) ایله اشعار اولنان دستورلر بربری اوزرینه تقسیم اولندقده

$\frac{\text{ظم } \tfrac{1}{2}\,\text{د}}{\text{ظم } \tfrac{1}{2}\,\text{ح}} = \frac{\text{ه} - \text{ح}'}{\text{ه} - \text{د}'}$ معادله‌سی تحصیل اولنوب بوواسطه ایله (ح) زاویه‌سی تعیین قلنور.

(٥) بَ ضلعیله ع ارتفاعی ودیگر ایکی حَ + ءَ ضلعلری مجموعی معلوم اولان برمثلثی حل ایتمك.

مساحهٔ مثلث = $\frac{بَ ع}{٢}$ = ه ر اولدیغندن

امدی (ماده ٦٧ تنبیه ٢) ر = (ه — بَ) م $\frac{١}{٢}$ ب

اولەرق بوحالده $\frac{بَ ع}{٢}$ = ه (ه — بَ) م $\frac{١}{٢}$ ب

اولوب بوصورتده م $\frac{١}{٢}$ ب = $\frac{بَ ع}{٢ ه (ه — بَ)}$ اولورکه

کچن مسئلەلردن هر قنغی بریسی مثللو حل اولنور.

(٦) بَ ضلعیله ب مقابل زاویەسی ودیگر ایکی ضلعنك $\frac{م}{ل}$ نسبتی معلوم اولان مثلثی حل ایتمك.

ب زاویەسی دیگر ایکی مجهول زاویەلرك متممی اولدیغندن انلرك مجموعی بزم ایچون معلوم اولوب شمدی اوچنجی احتمال واسطەسیله بینلرنده اولان فضل دخی تعیین اولنور.

$\frac{حَ — ءَ}{حَ + ءَ}$ = $\frac{حس ح — حس ء}{حس ح + حس ء}$ (٢٢) و(٢٣) دستورلرینه تطبیقله

$\frac{حَ — ءَ}{حَ + ءَ}$ = $\frac{٢ حس \frac{١}{٢}(ح — ء) حس \frac{١}{٢} ب}{٢ تحس \frac{١}{٢} ب تحس \frac{١}{٢} (ح — ء)}$ = $\frac{م \frac{١}{٢} (ح — ء)}{عم \frac{١}{٢} ب}$

اولور.

حالبوکه $\frac{حَ}{دَ} = \frac{م}{ل}$ اولدیغندن حل ایله

$\frac{حَ - دَ}{حَ + دَ} = \frac{م - ل}{م + ل}$ اولوب محلنه وضع ایله

$\frac{م - ل}{م + ل} = \frac{م \frac{۱}{۲} (ح - د)}{عم \frac{۱}{۲} ب}$ اشبو دستوردن

$م \frac{۱}{۲} (ح - د) = \frac{م - ل}{م + ل}$ عم $\frac{۱}{۲}$ ب اولور.

اوچنجی احتمالده اولدیغی مثللو تعیین اولنور.

(۷) $ىً$ ، $حً$ ، $دً$ مثللو ارتفاعات ثلثه‌سی معلوم اولان مثلثی حل ایتمك.

س = مساحهٔ مثلث فرض اولندقده ۲ س = $ىَ ىً$ = $حَ حً$ = $دَ دً$ اشبو مناسبات بروجه آتی صورتله یازیله‌بیلور.

۲ س = $\frac{ىَ}{\frac{۱}{ىً}} = \frac{حَ}{\frac{۱}{حً}} = \frac{دَ}{\frac{۱}{دً}}$ تعیین ایدلمك ایسته‌نیلان مثلث $\frac{۱}{ىً}$ ، $\frac{۱}{حً}$ ، $\frac{۱}{دً}$ ارتفاعات ثلثه‌نك عکس ترتیبلریله اضلاعی تشکل ایدن مثلثه مشابه اولدیغنی ارائه ایتمکله بوحالده اشبو ایکنجی مثلثك زوایاسنی حساب ایتمك کافیدر.

اضلاعنه کلنجه ٢ س = حَ حً = نَ حَ حس ء دستورینك یاردمیله تعیین اولنور .

$$\text{نَ} = \frac{\text{حً}}{\text{حس ء}}$$

وبویله‌جه اجرای عمل ایله سائر ضلعلر دخی تعیین اولنور .

# بشنجی فصل

( مثلثاتك هندسه ومساحه سؤاللری اوزرینه تطبیقی )

**٧٣ — قاعده‌سنه وارلمیلان بر قوله‌نك ارتفاعنی تعیین ایتمك.**

(شکل ٥١) اولا ارض اوزرنده مستوی یاخود یوکسکلکی مطلوب اولان ب ح بناسنه عمود سطح اوزرنده ارتفاع مطلوب ایله چوق فرق ایتمیه‌جك وجهله ب و قاعده‌سی اولچیلوب بعـده (و) نقطه‌سـنه غرافومترو آلتنی وضع ایدرك مذکور آلت یاردمیله کوز ایله رأس بنـادن مرور ایدن خط شـعاعك ل د خط افقیسیله تشکیل ایتدیکی ل د ح زاویه‌سی اخذ اولنور.

(شکل ٥١)

بو صورتله ح ل د مثلث قائم الزاویه‌سـنك بر ضلعیله زاویهٔ حاده‌لرندن بری معلوم اولمغـله دیکر ضلعنی تعیـین ایتمکده سهولت واردر .

ارتفاع حقیقی‌یی قزانمق ایچون مقدار معینه‌یه غروفومترونك د و ارتفاعنی ضم ایتمك ایجاب ایدر مثلا

د ل = ١٣,٧٥ متره ، ح د ل = ٤١° ٤٠′ ٥٠″ اولسه

ح ل = ع = د ل ظ ح د ل دستوریله

لع ى ل = ١,١٣٨٣٠٢٧

لع مم ح ى ل = ١,٩٤٩٥٦٥١

١,٠٨٧٨٦٧٨

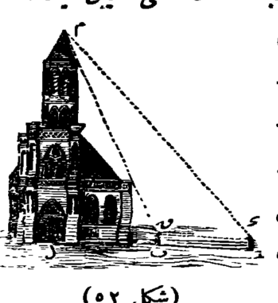
ع = ١٢,٢٤٢ متره اولمش اولور.

اكر غرافومترونك يردن اولان ارتفاعى ١,٢٠ متره اوله‌جق اولور ايسه ارتفاع مطلوب ١٣,٤٤ متره اولمش اولور.

(ح ى ل زاويه‌سنه ارتفاع زاويه‌سى دينور).

## ٧٤ — ياننه واريله‌ميان بربنانك ارتفاعنى تعيين ايتمك.

(شكل ٥٢) اولا ارض اوزرنده وارتفاع مطلوب استقامتنده ب ح اساس خطى اخذ اولندقدن صكره ب، ح نقطه‌لرنده اساس مذكور ايله م رأسندن مرور ايدن خطوط شعاعيه‌نك تشكيل ايلدكلرى زاويه‌لر اولچيلوب




(شكل ٥٢)

بعده م ى ى مثلثنك ى ى ضلعيله مجاور زاويه‌لرى معلوم اولديغندن م ى ضلعى سهولتله تحصيل اولنور واولوقت م ك ى مثلث قائم الزاويه‌سنك برزاويهٔ حاده‌سيله وترى معلوم اوله‌جغندن ارتفاع مطلوب تعيين اولنور .

مثلا ب ح = ى ى = ١٤,٧٥ متره، م ى ك = ٣٣° ١٧′ ١٠″

م و ك = ٣٠ً ٢٨َ ٤١ْ فرض اولنسه د م و = م = ٢٠ً ١١َ ٨ْ
اولوب بوصورتله

م و = $\frac{\text{د و حس د}}{\text{حس م}}$ ، م ك = م و حس و اولمغله

م ك = $\frac{\text{د و حس د حس و}}{\text{حس م}}$ اولور و لغارتمه‌یه بالتحویل

لع د و = ١,١٦٨٧٩٢٠

لع حس د = ١,٧٣٩٤٣٠١

لع حس و = ١,٨٢١٠٥٠٣

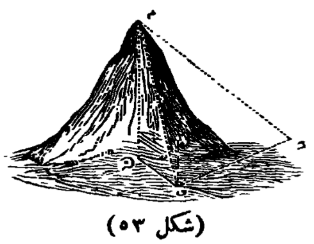
امَ حس م = ٠,٨٤٦٣٧٧٢

١,٥٧٥٦٤٩٦

م ك = ٣٧,٦٤ متره اولوب غرافومترونك ١,٣٠ متره ارتفاعی اشبو مقداره ضم اولندقده ٣٨,٨٤ متره ارتفاع بنا اولمش اولور.

### ٧٥ — بر طاغك ارتفاعنی تعیین ایتمك.

(شكل ٥٣) سطح شاقولی اوزرنده ب ح اساس خطنی المقدن ایسه انك یرینه كیف مایشا بر خط اساس انتخاب اولنوب اشبو خطك ب ، ح



(شكل ٥٣)

نقطه‌لریله رأس جبلدن مرور ایدن خطوط شعاعیه‌نك خط مذکور ایله تشکیل ایتدکلری زاویه‌لر اولچیلوب بو صورتله حاصل اولان ح م ب خطی مثلثك برضلعیله مجاور زاویه‌لری معلوم اوله‌جغندن ب م خطی دخی تعیین اولنور بعده ب دن خط شاقولیسیله ب م ضلعنك تشکیل ایلدیکی م ب ك زاویه‌سی حفظ اولنور اشبو زاویه ب م ﻫ زاویه‌سنه مساوی اولوب حادث اولان م ب ﻫ مثلث قائم الزاویه‌سنك وتریله برزاویهٔ حاده‌سی معلوم اولمغله م ﻫ ضلعی سهولتله حساب اولنور.

مثلا ب ح = ۲۳۵,۵۰ متره، م ب ح = ۳۶ََ ۴۵ْ، م ح ب = ۱۸ً ۵۴ْ، م ب ك = ۳۰ً ۲۷َ ۳۷ْ فرض اولنسه ب م = $\frac{\text{ب ح حس ح}}{\text{حس م}}$، م ﻫ = ب م تحس ب م ﻫ اولمغله م ﻫ = $\frac{\text{ب ح حس ح تحس ب م ﻫ}}{\text{حس م}}$ اولوب لغارتمه‌سی آلندقده

لع ب ح = ۲,۳۷۱۹۹۰۹

لع حس ح = ۱َ,۸۵۳۹۸۵۶

لع تحس ب م ﻫ = ۱َ,۸۹۹۷۰۸۸

لعَ حس م = ۰,۰۰۶۵۱۵۶

۲,۱۳۲۲۰۰۹

م ﻫ = ۱۳۵,۵۸۲ متره اولور.

اشبو مسئله‌ده ب ح ضلع مجسمیله م ب ح، م ح ب زاویه‌لری و ب ع میلنك خط شاقولی‌یه اولان میلی معلوم اولان اهرامك ارتفاعی حساب اوله‌بیلور .

**۷٦ — ب نقطه‌سیله وصولی غیر ممکن اولان د نقطه‌سی بیننده واقع بعدی تعیین ایتمك.**

(شکل ٥٤) اولامرده ارض اوزرنده ب ح اساس خطیله ب، ح نقطه‌لریله د نقطه‌سندن مرور ایدن خطوط شعاعیه‌سنك خط اساس ایله تشکیل ایتدکلری زاویه‌لر اولچلدکدن صکره ب د ح مثلثنك بر ضلعیله مجاور زاویه‌لری معلوم اولمغین مثلث مذکوری یعنی بعد مطلوبی حل ایتمك آساندر .

(شکل ٥٤)

مثلا ب ح = ٤٥٧,٦٥ متره، ب = ٦١° ١٠′ ٢٥″، ح = ٥٨° ١٩′ ٢٠″ فرض اولنسه ب د = (ب ح حب ح)/(حب د) اولوب، د = ١٨٠° — (ب + ح) = ٦٠° ٣٠′ ١٥″ اولمغله دستورك لغارتمه‌سی الندقده

لع ب ح = ٢,٦٦٠٥٣٣٥

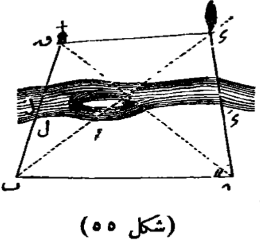
لع حب ح = ١,٩٢٩٩٣٧١

لعَ حب د = ٠,٠٦٠٢٨٥٤

٢,٦٥٠٧٥٦٠

ب د = ٤٤٧,٤٦ متره اولمش اولور.

**٧٧ — یانه واریلمیانه د ، ق نقطه‌لری بیننده واقع بعدی تعیین ایتمك.**



(شکل ٥٥)

(شکل ٥٥) اولا ارض اوزرنده ب ح اساس خطی وبعده ب ، ح نقطه‌لریله د ، ق نقطه‌لرندن مرور ایدن خطوط شعاعیه‌نك خط مذکور ایله تشکیل ایتدکلری زاویه‌لری اولچیلوب حفظ اولنور.

ب د ح مثلثنك بر ضلعیله ایکی زاویه‌سی معلوم اولدیغندن ب د خطی سهولتله حساب اولنور.

ینه بویله‌جه ق ب ح مثلثنك حلیله ب ق خطی تحصیل اولنور الحاصل ق ب د مثلثنك ایکی ضلعی وبینلرنده واقع زاویه معلوم اولمغله د ق خطی دخی تعیین اولنه‌بیلور.

مثلا ب ح = بَ = ٣٧٨٤ متره ، ق ب ح = ب = ٢٥َ ٨٧° ، د ب ح = بً = ٣٢َ ٤٧° ، ب ح د = ح = ٣٥َ ٨٤° ، ب ح ق = حً = ٣٤َ ٤٦° فرض اولنسه برنجی حساب ب ق = قَ ایله ، قَ = (بَ حس ح) / (حس ب ق ح) ، ب ق ح = ١َ ٤٦° اولوب لغارتمه‌سی آلندقده

لع بَ = ٣,٥٧٧٩٥١١

لع حس جً = ١̄,٨٦١٠٤١٢

لعَ حس ب ج م = ٠,١٤٢٩٤٣٩

لع قَ = ٣,٥٨١٩٣٦٢

ايكنجي حساب

ب د = س ، س = بَ حس ج / حس ب د ج

ب د ج = ٥٣َ ٤٧° لغارتمه‌سی آلندقده

لع بَ = ٣,٥٧٧٩٥١١

لع حس ج = ١̄,٩٩٨٠٥٦٣

لعَ حس ب د ج = ٠,١٢٩٧٢٤٤

٣,٧٠٥٧٣١٨

اوچنجي ق ب د مثلثك حسابى، ق ب د = ق ب ج — د ب ج = ٥٣َ ٣٩° اولوب قَ ، س ضلعلرى يالكز لغارتمه‌لريله معلوم اولدقلرندن (ماده ٦٦ تنبيه) ده استخراج اولنان دستورى استعمال ايتمك اولادر شويله كه ظم ١/٢ (ق — ق د ب) = ظم (٤٥° — هـ) × ظم ١/٢ ق ب د، دستور مذكورده ظم هـ = قَ/س اولديغندن لغارتمه‌يه تحويل اولندقده لع ظم هـ = لع قَ — لع س = ١̄,٨٧٦٢٠٤٤، هـ = ٣٢ً ٥٦َ ٣٦° اولور.

لع م (٤٥° — ه) = لع م ٨° ٣′ ٢٨″ = ١́,١٥٠٩٦٩١

لع م ١/٢ ق ب د = لع م ١٩° ٥٦′ ٣٠″ = ٠,٤٤٠٣١١٦

لع م ١/٢ (ق — د) = ١́,٥٩١٢٨٠٧

١/٢ (ق — د) = ٢١° ١٨′ ٥٥″ ، ق = ٩١° ٢٢′ ٢٥″

١/٢ (ق + د) = ٧٠° ٣′ ٣٠″ ، د = ٤٨° ٤٤′ ٣٥″

اولور .

د ق = دَ = (قَ حس ق ب د)/(حس ق د ب) لغارتمه‌سی آلندقده

لع قَ = ٣,٥٨١٩٣٦٢

لع حس ق ب د = ١́,٨٠٧٠١١٤

لعَ حس ق د ب = ٠,١٢٣٩٢٠٨

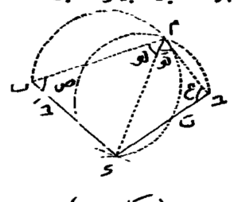
لع دَ = ٣,٥١٢٨٦٨٤

دَ = ٣٢٥٧,٣٨ متره اولمش اولور.

**٧٨** — بر مملکت خریطه‌سی اوزرنده ب ، ح ، د نقاط ثلثه‌سی معلوم ایکن نقاط مذکوره بیننده واقع ب د ، د ح بعدلری برزاویهٔ معلومه تحتنده رؤیت اولنمق اوزره دردنجی بر (م) نقطه‌سنی (خریطه اوزرنده) تعیین ایتمك.

(اشبو نقاط اربعه برمستوی اوزرنده فرض اولنمشدر) .

(شکل٥٦) م نقطه‌سی بالهندسه سهولتله بولنه‌بیلور بونك ایچون ب د ج خطلری اوزرینه معلوم زاویه‌لری تشکیل ایتمك اوزره برقوس دائره رسم ایتمك کافی اولوب اشبو دائره‌لرك تقاطع ایتدکلری محل م نقطهٔ مطلوبه‌سندن عبارت اولور.



(شکل ٥٦)

اشته مثلثات ایله اصول حلی بروجه آتی کوسترلمشدر که ب م د = ه، د م ج = هَ، ب د ج = د، م ب د = ص، م ج د = ع حرفلریله ارائه اولندقده ب د ج م ذواربعه الاضلاعیسنده ص + ع = ٣٦٠° − (د + ه + هَ) اولوب ص − ع فضلی ارانلدقده

ب م د، ج م د مثلثلری واسطه‌سیله د م = (جَ حس ص) / (حس ه)

د م = (بَ حس ع) / (حس هَ) مساویلردن برمعادله تشکیل اولندقده

(جَ حس ص) / (حس ه) = (بَ حس ع) / (حس هَ) اولوب بورادن دخی

(حس ص) / (حس ع) = (بَ حس هَ) / (جَ حس هَ) اولور.

$\text{د}' = \frac{\text{ج}'\ \text{حس ه}}{\text{حس ه}}$ دستوری ($\text{د}'$) لك تحصیلنه مدار اولدقدن بشقه اختصار ایچون محلنه وضع اولندقده

$\frac{\text{حس ص}}{\text{حس ع}} = \frac{\text{ب}'}{\text{د}'}$ اولور صورت ایله مخرج مجموعنك فضلنه نسبتی آلندقده

$$\frac{\text{حس ص} + \text{حس ع}}{\text{حس ص} - \text{حس ع}} = \frac{\text{ب}' + \text{د}'}{\text{ب}' - \text{د}'}$$

امدی $\frac{\text{حس ص} + \text{حس ع}}{\text{حس ص} - \text{حس ع}} = \frac{\text{م}\ \frac{1}{2}\ (\text{ص}+\text{ع})}{\text{م}\ \frac{1}{2}\ (\text{ص}-\text{ع})}$ اولمغله محلنه بالوضع

$$\frac{\text{م}\ \frac{1}{2}\ (\text{ص}+\text{ع})}{\text{م}\ \frac{1}{2}\ (\text{ص}-\text{ع})} = \frac{\text{ب}' + \text{د}'}{\text{ب}' - \text{د}'}$$ وبورادن

$$\text{م}\ \frac{1}{2}(\text{ص}-\text{ع}) = \frac{\text{ب}' - \text{د}'}{\text{ب}' + \text{د}'}\ \text{م}\ \frac{1}{2}(\text{ص}+\text{ع}) \qquad (1)$$

اولور .

ص — ع، ص + ع معلوم اولملریله ص ، ع زاویه‌لری قولایلقله حساب اولنور .

ب د م زاویه‌سیدخی $\text{ب د م} = 180^\circ - (\text{ه} + \text{ص})$

معادله‌سی یاردمیله بولنور واوحالده د م = $\frac{\text{جَ حس صَ}}{\text{حس ه}}$ دستوریله

د م بعدی تعیین اولنور .

**۷۹** تنبیه — اکر $\frac{۱}{۲}$ (ص+ع) = ۹۰َ فرض اولنور

ایسه مم $\frac{۱}{۲}$ (ص + ع) = ∞ اولور و ص + ع = ۱۸۰°

فرض اولندقده حس ص = حس ع اولمسیله

$\frac{\text{حس ص}}{\text{حس ع}}$ = $\frac{\text{بَ حس ه}}{\text{جَ حس ه}}$ معادله‌سندن بَ حس ه = جَ حس هَ

یاخود :

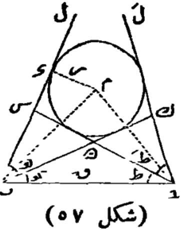
بَ = $\frac{\text{جَ حس هَ}}{\text{حس ه}}$ تحصیل اولنور وبنه

دَ = $\frac{\text{جَ حس هَ}}{\text{حس ه}}$ اوله‌جغنـدن بو حالده دَ = بَ ویا

بَ — دَ = ۰ . اولوب (۱) دستوری ایسه مم $\frac{۱}{۲}$ (ص — ع)

= ۰ × ∞ حالنه منجر اوله‌رق غیر معین قالور اشبو غیر معین
کیفیتی بوراده حقیقیدر . زیرا ص ، ع زاویه‌لری بربرلرینك
متممی اولدقلرندن ب م ج د ذو اربعة الاضلاعی داخل دائره‌ده
مرسوم دیمك اولوب ب د ج زاویه‌سنك اضلاعی اره‌سنده
محدود اولان قوس دائره‌نك هربر نقطه‌سی سؤاله جواب
اولور .

## ٨٠ — یانده واریلمیان بر قولدنك نصف قطرینی حساب ایتمك.



(شکل ٥٧)

(شکل ٥٧) اولا ب ح اساس خطی واشبو خطك ب ، ح نقطه‌لرندن قله‌یه مماساً رسم اولنان خطوط شعاعیه‌نك اساس مذکور ایله تشکیل ایتدکلری زاویه‌لر اولچیلوب بعده م دائره‌سنك نصف‌قطرینك تعیننه مباشرت اولنور.

شویله‌که ب ح = ق , م ء = ر، زاویه‌لر دخی ء ب ح = ب، ك ب ح = هَ , ك ح ب = ح، ۵ ح ب = طَ فرضیله م ب ح , م ب ء زاویه‌لرینك مجموعی (ب) یه وفضلی (هَ) یه مساویدر. زیرا م ب خطی ء ب ك زاویه‌سنك خط منصفیدر.

امدی م ب ح = $\frac{1}{2}$ (ب + هَ) ، م ب ء = $\frac{1}{2}$ (ب — هَ)
وینه بویلجه م ح ب = $\frac{1}{2}$ (ح + طَ) ، م ح ك = $\frac{1}{2}$ (ح — طَ)
اولملریله

ب م ح مثلثنده $$\text{ب م} = \frac{\text{ق حس م ح ب}}{\text{حس (م ح ب + م ب ح)}}$$ یاخود

$$\text{ب م} = \frac{\text{ق حس } \frac{1}{2} \text{(ح + طَ)}}{\text{حس } \frac{1}{2} \text{(ب + هَ + ح + طَ)}}$$ اولور.

دیکر م ء ب مثلث قائم الزاویه‌سندن دخی ء م = ر =

ب م × حس $\frac{۱}{۲}$ (طَ — هَ) تحصیل اولنوب ومساویلری محلنه وضع اولندقده

$$ر = \frac{ص \text{ حس } \frac{۱}{۲} (طَ — هَ) \text{ حس } \frac{۱}{۲} (ط + ه)}{\text{حس } \frac{۱}{۲} (ب + هَ + ح + طَ)}$$ اولور.

**۸۱ — براصد (شکل ۵۸) سطح بحردن ۷۵ متره مرتفع بولندیغی ح نقطه‌سنده افق ظاهرینک ه انحطاط زاویه‌سی ۱۵َ۳۰ً اولدیغی معلوم اولدرق نصف قطر ارضک مقدارینی حساب ایتمک مطلوبدر.**

(شکل ۵۸)

(راصد موسی‌الیه برست مکتبنک طلبه‌لریله اشبو عملیاتی اجرا ایتمشدر.)

ق ح ب = ه، ح ی ب زاویه‌لری ضلعلرینک عمودیتی حسبیله بربرلرینه مساوی اولوب امدی ح ب ی مثلث قائم الزاویه‌سنده ب ی = ح ی تحس ه یاخود

ر = (ر + ح) تحس ه = ر تحس ه + ح تحس ه

اوله‌رق بورادن دخی ر (۱ — تحس ه) = ح تحس ه

اولوب ر یه حل اولندقده $ر = \frac{ح \text{ تحس ه}}{۱ — \text{تحس ه}}$ اولور. اشبو دستوری لغارتمه ایله حساب اولنه‌بیله‌جک برصورتله کتورمک ایچون (ماده ۳۸) ده‌کی اصوله تطبیقاً:

۲ حس$^{۲}$ $\frac{۱}{۲}$ هـ = ۱ — محس هـ اولمغله بوصورتده

ر = $\frac{\text{ح محس هـ}}{\text{۲ حس}^{۲}\ \frac{۱}{۲}\ \text{هـ}}$ اولوب معادلهٔ مذکوره‌رده بولنان

حروفاتك هر بری معادل قیمتلریله محللرینه وضع اولندقده

بورادن ر = $\frac{\text{۷۵ محس ۱٥° ۳۰'}}{\text{۲ حس}^{۲}\ \text{۷° ٤٥'}}$ لغارتمه‌سی آلندقده

لع ح = ۱,۸۷٥۰٦۱۳

لع محس هـ = $\bar{۱}$,۹۹۹۹۹٥٦

لعَ ۲ = $\bar{۱}$,٦۹۸۹۷۰۰

— ۲ لع حس $\frac{۱}{۲}$ هـ = ٥,۲۹۳۹٤٥۰

٦,۸٦۷۹۷۱۹

ر = ۷۳۷۸٥٦٤ متره (اشبو قیمت غایت بیوکدر) اولور.

**۸۲** — قطبده ۲۸' ۲۳° اوزاقلغنده مرور ایدن دائرهٔ صغیرهٔ متوازیه‌نك معلوم اولمسیله منقطهٔ منجمده‌لرده برینك میریامترو جنسنده مساحهٔ سطحیه‌سنی حساب ایتمك. (ارضك ٤۰۰۰ میریامترو محیطنده بر کره قیاسیله حساب اولنه‌جقدر).

مساحهٔ مطلوبه س ونصف قطر ارض ر ومنطقه‌نك ارتفاعی ع فرض اولندقده س = ۲ π ر ع اولور.

امدی ع = ر — ر جب بَ = ر (۱— جب بً)
= ۲ ر $حس^2$ $\frac{۱}{۲}$ بَ اولوب بوصورتده س = ٤ π $ر^2$ ×
$حس^2$ $\frac{۱}{۲}$ بَ ودیکر وجهله ر = $\frac{٤۰۰۰}{۲ π}$ اولدقلرندن بو حالده

س = $\frac{(٤۰۰۰)^2 \times حس^2\ ٤٤\ ۱۱^\circ}{\pi}$ اولور. لغارتمه‌سی آلندقده

۲ لع ٤۰۰۰ = ۷,۲۰٤۱۲۰۰

۲ لع حس ٤٤َ ۱۱ْ = ۱َ,٦۱٦٥۱۸۰

لعَ π = ۱َ,٥۰۲۸٤۹۱

٥,۳۲۳٤۸۷۱

س = ۲۱۰٦۱٤ میریامترو مربعی اولمش اولور.

**۸۳ — (شکل٥۹) ن مثللو برمانعه تصادف ایدن ب ط خطنی مانعك ایلروسنه طوغری اوزاتمق مطلوبدر.**

مانعك ایکی طرفی کورینه‌جك وجهله بر م نقطه‌سی انتخاب اولندقده ب ط خطیله ب ، ط زاویه‌لرینی اولچدکدن صکره ط م خطی حساب اولنور بعده م نقطه‌سندن کیف مایشا م ح استقامتی تعیین اولنوب

(شکل ٥۹)

ط م ح زاویه‌سی اولچیلور. اولوقت ط م ح مثلثندن ط م ضلعیله

بو ضلعك مجاورى بولنـان ح ط م ، ط م ح زاويه‌لرى معلوم اولديغندن م ح ضلعى حساب اولندقده ح نقطه‌سى معلوم اولور.

حسابنه كلنجه : م ط = ب ط حس ب / حس (ب + ط) اولور . و

م ح = م ط حس ح ط م / حس (م + ح ط م) وبورادن

م ح = ب ط حس ب حس ح ط م / حس (ب + ط) حس (م + ح ط م) اولور.

## ٨٤ — بر كوكبك مركز ارضه اولان مسافه‌سنك تعيينى مطلوبدر.

اول امرده بر نصف النهار اوزرنده عرضلرى معلوم د ، ح نقطه‌لرندن عين وقتده مذكور كوكب رصد اولنـه‌رق د ے ، ح ے خط شعاعلرينك د م ، ح م شاقوللريله تشكيل ايتـدكلرى ل ، لَ زاويه‌لرى تعيين اولنور. ح م د زاويه‌سى ايكى نقطه‌نك عرضلرينك فضللريدر .

م ے ح ، م ے د زاويه‌لرى طَ ، ط حرفلريله كوستريلور ايسـه م د ، م ح ضلعلرينـك مساواتندن و م ے ضلعنك مشترك اولمسندن

$\frac{\text{حس ط}}{\text{حس طَ}} = \frac{\text{حس ل}}{\text{حس لَ}}$ یاخود

$\frac{\text{مم } \frac{1}{2} (\text{ط} + \text{طَ})}{\text{مم } \frac{1}{2} (\text{ط} - \text{طَ})} = \frac{\text{مم } \frac{1}{2} (\text{ل} + \text{لَ})}{\text{مم } \frac{1}{2} (\text{ل} - \text{لَ})}$ اولور .

حـ ے ء زاویه‌سی معلوم اولدیغندن ط — طَ فضلی وبونی متعاقب ط زاویه‌سی تعیین اولنوب بعده

م ـ ے $= \frac{\text{ر حس ل}}{\text{حس ط}}$ دستوریله‌ده ر نصف قطر ارض اوله‌رق م ـ ے بعدی استخراج اولنور .

مثال — دانچیـح بلده‌سیله امیدبرونی بر نصف انهاراوزرنده بولنه‌رق عرضلری ۲۲٫۱ ً ۱۰ َ ۵۴ ْ و — ۲٤٫۱ ً ٤٥ َ ۳۳ ْ اولدقلرندن حـم ء زاویه‌سیدخی ٤۷٫۲ ً ۵۵ َ ۸۷ ْ اولور .

اکر لَ = ۲٤٫٦ ً ۲۸ َ ٤۲ ْ ، ل = ۳۸٫۳ ً ۳۸ َ ٤٦ ْ اولورسه ط + طَ = ۱۵٫٦ ً ۲۵ َ ۵ ْ اولور بو حالده ط + طَ ، ط — طَ قوسلری غایت کوچك اوله‌جقلرندن اولوقت مماسلری النه‌رق

$\text{مم } \frac{1}{2} (\text{ط} - \text{طَ}) = \text{مم } \frac{1}{2} (\text{ط} + \text{طَ}) \frac{\text{مم } \frac{1}{2} (\text{ل} - \text{لَ})}{\text{مم } \frac{1}{2} (\text{ل} + \text{لَ})}$

اولور .

بورادن $\frac{1}{2}$ (ط — طَ) = ۱۹٫۱ ً بوصورتده ط = ۵٦٫۹ ً ٤۱ َ ، طَ = ۱۸٫۸ ً ۱۹ َ و م ـ ے = ۵۹٫٤۵۹ × ر اولور .

## تطبيقات هندسيه

(١) بر مثلثك كندى مستويسى اوزرنده مأخوذ هرقنغى ا نقطه‌سندن اوچ ضلعنه موازى رسم اولنان خطلر واسطه‌سيله اوچ متوازى الاضلاع واوچ مثلث تشكل ايدوب متوازى الاضلاعلرك حاصل ضربى مثلثلرك حاصل ضربنك سكز مثلنه مساوى اولديغك اثباتى مطلوبدر .

مثلث ب حـ د اولسون

ا نقطه‌سى اطرافنده مثلثلرك تشكل ايدن زاويه‌لرى ، هَ ، ه حرفلريله ارائه اولندقده متوازى الاضلاعك زاويه‌لرى اشبو زاويه‌لره رأساً مقابل واقع اولدقلرندن مساوى اولورلر .

و م خطنك قسملرى ب ، بَ ، ط ك خطنك قسملرى حـ ، حَ ، ح ل خطنك قسملرى د ، دَ حرفلريله ارائه اولندقده مثلثلرك سطحلرى

$\frac{1}{2}$ ب حـ جب ه ، $\frac{1}{2}$ بَ جب د هَ ، و $\frac{1}{2}$ هَ دَ جب ه اولوب حاصل ضربلرى

$\frac{1}{2}$ ب بَ حـ حَ د دَ جب ه جب هَ جب ه اولور .

متوازى الاضلاعلرك سطحلرى ايسه

ب ح حس ۞، بَ ء حس هَ، حَ ءَ حس ه اولوب
حاصل ضربلری دخی

بَ بَ حَ حَ ءَ ءَ حس ۞ حس هَ حس ه اشبو حاصل
ضرب اولکی حاصل ضربك سکز مثلی اولوب مطلوب ثابت
اولور.

(۲) بر برلرندن ل بعدی قدر اوزاق اولان ح ق، ء ب
خطین متوازیینك برنجیسنه حَ قدر مسافهٔ بعیده‌سنده موضوع
م نقطهٔ ثابته‌سندن م ب ح عمود مشترکنك رسمیله اشبو ب
نقطه‌سندن اعتباراً ء نقطه‌سنی یعنی ع مسافه‌سنی
بر وجهله انتخاب ایتملیدرکه اشبو مجهول نقطه‌دن
رسم اولنان ء ق عمود مشترکی ثابت م نقطه‌
سندن ق م ء زاویه‌سنك مقدار اعظمیسیله مشاهده اولنه‌بیلسون.

(۱۸۷۲ سنه‌سی تموزنده سن‌سیر مکتبنك قبول امتحاننده
ترتیب اولنان سؤالدر)

معلوم اولانلر ح ب = ل، م ب = حَ، ق م ء زاویه‌سی
ه، ب ء مسافهٔ مجهوله‌سی ع حرفلریله ارائه وکذا

ء م ح = ب، ق م ح = هَ فرضیله

$\frac{ع}{حَ}$ = مم ب ، $\frac{ع}{ل + حَ}$ = مم هَ اولوب بو حالده

(ماده ۳۵) ۱۳ دستورینه تطبیق ایله

$$\text{م}\,(\text{ب} - \text{هَ}) = \frac{\dfrac{\text{ع}}{\text{حَ}} - \dfrac{\text{ع}}{\text{ل} + \text{حَ}}}{1 + \dfrac{\text{ع}^{2}}{\text{حَ}\,(\text{ل} + \text{حَ})}}$$

$$= \frac{\text{ع}}{\text{حَ}} \; \frac{(\text{ل} + \text{حَ} - \text{حَ})}{\text{حَ}\,(\text{ل} + \text{حَ}) + \text{ع}^{2}}$$

یاخود $\text{م ه} = \dfrac{\text{ل ع}}{\text{حَ}\,(\text{ل} + \text{حَ}) + \text{ع}^{2}}$

اشبو تعبیر جبریله مقـدار اعظمیسی مطلوب اولان ه زاویه‌سنك قیمتی تعیین ایتمك ایچون

$\dfrac{\text{ل ع}}{\text{حَ}\,(\text{ل} + \text{حَ}) + \text{ع}^{2}} = \text{ط}$ فرض اولندقده

$\text{ط ع}^{2} - \text{ل ع} + \text{ط حَ}\,(\text{ل} + \text{حَ}) = 0$ اولوب

ع حل اولندقده ، $\text{ع} = \dfrac{\text{ل} \pm \sqrt{\text{ل}^{2} - 4\,\text{ط}^{2}\,\text{حَ}\,(\text{ل} + \text{حَ})}}{2\,\text{ط}}$

اولور .

حالبوکه ط مقدارینك قیمت اعظمیه‌سی شو $4\,\text{ط}^{2}\,\text{حَ} \times (\text{ل} + \text{حَ}) - \text{ل}^{2} = 0$ معادله‌سیله تحصیل اولنه‌جغندن حل ایله

$\text{ط} = \dfrac{\text{ل}}{2\sqrt{\text{حَ}\,(\text{ل} + \text{حَ})}}$ اولوب بو حالده (ع)نك قیمتی دخی

$\text{ع} = \dfrac{2\,\text{ل}\sqrt{\text{حَ}\,(\text{ل} + \text{حَ})}}{2\,\text{ل}}$ یاخود

$\text{ع} = \sqrt{\text{حَ (ل + حَ)}}$ اولورکه ع مسافه‌سی حَ ایله ل + حَ بیننده وسط متناسب بولنور .

(٣) ر نصف قطری معلوم اولان دائره خارجنه بر وجهله ب ح ء و مثللو بر شبه منحرف متساوی الساقین رسمی مطلوبدرکه ب و قطرینك دوریله حاصل ایلدیکی حجم نصف دائره‌نك حاصل ایلدیکی کره حجمیله ویریلان م نسبتنده اولسون .

شبه منحرف واسطه‌سیله تشکل ایدن حجم ح ایله کوستریلور ایسه

$$\text{ح} = \frac{٢}{٣}\pi\,\text{ر}^{٢}\,(\text{٣ م ط + ب ط})$$ اولور .

م ط = ر مم ع اولوب ٢ ع + س = ٩٠° اولمسی حسبیله

$$\text{م ط} = \text{ر مم}\left(٤٥^{\circ} - \frac{\text{س}}{٢}\right) = \text{ر}\,\frac{١ - \text{مم}\frac{\text{س}}{٢}}{١ + \text{مم}\frac{\text{س}}{٢}}$$

$$\text{ب ط} = \text{ر مم س} = \frac{٢\,\text{ر مم}\frac{\text{س}}{٢}}{١ - \text{مم}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}$$ اولور بوصورتده

$$\text{ح} = \frac{٢}{٣}\pi\,\text{ر}^{٣}\left\{\frac{١ - \text{مم}\frac{\text{س}}{٢}}{١ + \text{مم}\frac{\text{س}}{٢}} + \frac{٢\,\text{مم}\frac{\text{س}}{٢}}{١ - \text{مم}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}\right\}$$

$$= \frac{٢}{٣}\pi\,\text{ر}^{٣}\,\frac{٣\,\text{مم}^{٢}\frac{\text{س}}{٢} - ٤\,\text{مم}\frac{\text{س}}{٢} + ٣}{١ - \text{مم}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}$$ اولور

کره حجمی ایسه ٤/٣ π ر^٣ اولدیغندن مسئله‌نك معادله‌سی ترتیب اولندقده

٣م^٢ س/٢ — ٤م س/٢ + ٣ = ٢م (١ — م^٢ س/٢) یاخود

(٣ + ٢م) م^٢ س/٢ — ٤م س/٢ + ٣ — ٢م = ٠

م س/٢ = (٢ ± √(٤م^٢ — ٥)) / (٣ + ٢م) اولور .

مناقشه . جذرلرك حقیقی اولمسی شرطی ٤م^٢ = ٥ یاخود

م = √٥ / ٢ اولمسیله حصوله کلور.

(١) اکر م > √٥ / ٢ اولور ایسه جذرلر حقیقی وغیر مساوی اولورلر . بو حالده ٣ — ٢م >٠ یاخود م > ٣/٢ اولور ایسه یالکز برصورتله حلی اولوب جذرلرك اشارتلری مخالف بولنورلر اکر ٣ — ٢م > ٠ .

یاخود م < ٣/٢ اولور ایسه جذرلر حقیقی اولوب ایکی صورتله حلی اولور.

(٢) اکر م = √٥ / ٢ اولور ایسه جذرلر حقیقی ومساوی اولوب م ایچون الك اصغر قیمت حاصل اولور.

(٣) واکر م > √٥ / ٢ اولور ایسه جذرلر محدث اولوب اول حالده مسئله‌نك حلی ممکن اولمز .

(٤) — بر مثلث متساوی الساقینك قاعده‌سی اوزرنده النان بر نقطه‌نك مساوی ضلعلره اولان مسافه‌لری مجموعی ثابتدر.

رأس زاویه‌سی (ب) وقاعده‌سی بَ اولان مثلث متساوی الساقینك مذكور قاعده‌سنك قسملری س ، بَ — س اولدقلرینه نظراً انتخاب اولنان نقطه‌نك مساوی ضلعلره اولان مسافه‌لری : س حب ح ، (بَ — س) حب ء اولوب مجموعلرینك مساوی اولدیغندن بَ حب ح = ثابت = ح اولور.

(٥) — قطرلرینك تشكیل ایتدكلری هـ زاویه‌سیله بَ > حَ اولمق اوزره بَ ، حَ ضلعلری معلوم اولان متوازی الاضلاعك قطرینی حساب ایتمك.

قطرلرینك نصفلری س ، ع حرفلریله ارائه اولندقده

$$س^2 + ع^2 - 2 س ع \, تجب \, هـ = حَ^2 ، س^2 + ع^2 + 2 س ع \times تجب \, هـ = بَ^2$$

مذكور ایكی دستور بركره جمع وبركره طرح ایله

$$\left\{ \begin{aligned} س \, ع &= \frac{بَ^2 - حَ^2}{4 \, تجب \, هـ} \\ س^2 + ع^2 &= \frac{بَ^2 + حَ^2}{2} \end{aligned} \right.$$

ویاخود قاعدهٔ جبریه‌یه تطبیقاً

$$(س + ع)^2 = \frac{(بَ^2 + حَ^2) \, تجب \, هـ + بَ^2 - حَ^2}{2 \, تجب \, هـ} =$$

$$\frac{\text{ب}'^{2}(1+\text{تحس ه})-\text{ح}'^{2}(1-\text{تحس ه})}{2\,\text{تحس ه}}\ \text{یاخود}$$

$$(\text{س}+\text{ع})^{2}=\frac{2\,\text{ب}'^{2}\,\text{تحس}^{2}\frac{\text{ه}}{2}-2\,\text{ح}'^{2}\,\text{حس}^{2}\frac{\text{ه}}{2}}{2\,\text{تحس ه}}$$

$$\text{س}+\text{ع}=\sqrt{\frac{\text{ب}'^{2}\,\text{تحس}^{2}\frac{\text{ه}}{2}-\text{ح}'^{2}\,\text{حس}^{2}\frac{\text{ه}}{2}}{\text{تحس ه}}}$$

عین صورتله $\text{س}-\text{ع}=\sqrt{\frac{\text{ح}'^{2}\,\text{تحس}^{2}\frac{\text{ه}}{2}-\text{ب}'^{2}\,\text{حس}^{2}\frac{\text{ه}}{2}}{\text{تحس ه}}}$

اشبو ایکی معادله برکره جمع وبرکره طرح ایدیلور ایسه قطرلرك قیمتلری تعیین اولنور.

مناقشه — (س) و (ع) نك قیمتلری حقیقی اولمق ایچون $\text{ح}'^{2}\,\text{تحس}^{2}\frac{\text{ه}}{2}-\text{ب}'^{2}\,\text{حس}^{2}\frac{\text{ه}}{2}\geq$ . اولمسی اقتضا ایدرو بورادن

$$\frac{\text{حس}^{2}\frac{\text{ه}}{2}}{\text{تحس}^{2}\frac{\text{ه}}{2}}\leq\frac{\text{ح}'^{2}}{\text{ب}'^{2}}\ \text{یاخود}$$

$$\text{م}\ \frac{\text{ه}}{2}\leq\frac{\text{ح}'}{\text{ب}'}\ \text{اولور.}$$

اکر $\text{م}\ \frac{\text{ه}}{2}=\frac{\text{ح}'}{\text{ب}'}$ اولور ایسه ایکنجی مجذور صفر اولوب

$\text{س}=\text{ع}$ اولور وبوندن بشقه

$$\text{حس}\,\frac{\text{ه}}{\text{٢}} = \frac{\text{م}\,\frac{\text{ه}}{\text{٢}}}{\sqrt{\text{١} + \text{م}^{\text{٢}}\,\frac{\text{ه}}{\text{٢}}}} = \frac{\acute{\text{ح}}}{\sqrt{\acute{\text{ب}}^{\text{٢}} + \acute{\text{ح}}^{\text{٢}}}} \quad \text{و}$$

$$\text{تحس}\,\frac{\text{ه}}{\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{١} + \text{م}^{\text{٢}}\,\frac{\text{ه}}{\text{٢}}}} = \frac{\acute{\text{ب}}}{\sqrt{\acute{\text{ب}}^{\text{٢}} + \acute{\text{ح}}^{\text{٢}}}} \text{،} \quad \text{و}$$

$\text{٢ س} = \text{٢ ع} = \sqrt{\acute{\text{ب}}^{\text{٢}} + \acute{\text{ح}}^{\text{٢}}}$ اولور .

وبو حالده متوازی الاضلاع بر مستطیل اولور.

اکر کچن قیمتده $\acute{\text{ب}} = \acute{\text{ح}}$ اولور ایسه

$\text{٢ س} = \text{٢ ع} = \acute{\text{ب}}\,\sqrt{\text{٢}}$ وبو حالده شکل مربع اولور.

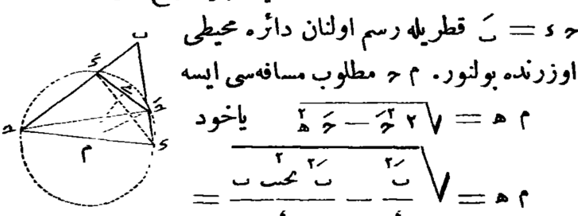
اکر $\text{م}\,\frac{\text{ه}}{\text{٢}} = \frac{\acute{\text{ح}}}{\acute{\text{ب}}}$ ، $\acute{\text{ح}} = \acute{\text{ب}}$ اولور ایسه ٢ س، ٢ ع

غیر معین یعنی $\div$ اولور .

بو غیر معینلك حقیقیدر چونکه ه زاویه‌سی قائمه ودرت ضلعی مساویدرلر . بو حالده شکل بر معینــدر ، قطرلر عمودیتی بوزمقسزین وضلعلر تحول ایتمکسزین لاینقطع تزاید ایده‌بیلورلر.

(٦) بر مثلثك ایکی رأسندن تنزیل اولنان عمودلرك موقع عمود نقطه‌لری بیننه وصل اولنان خط مستقیمه مثلثك مذکور ایکی رأس بینتــده کی ضلعنك منتصف نقطه‌ســنك مسافه‌سنی حساب ایتمك .

ب ج د مثلثنك ب ، د رأسلريله جَ دَ موقع عمود نقطه‌لری



ج د = بَ قطريله رسم اولنان دائره محيطی اوزرنده بولنور. م ج مطلوب مسافه‌سی ايسه

$م\,هـ = \sqrt{٢\,جَ^{٢} - جَ\,هـ^{٢}}$ ياخود

$م\,هـ = \sqrt{\frac{بَ^{٢}}{٤} - \frac{بَ^{٢}\,تحس^{٢}\,ب}{٤}} = \frac{بَ}{٢} \times حس\,ب$ اولور .

(٧) نصف قطری ر اولان كره‌يی بر وجهله بر مستوی ايله قطع ايتمليدركه حاصل اولان منطقهٔ كره سطح مستديری ب م ج مخروطننك سطح مستدیرینه مساوی اولسون ثانياً قطعه‌نك حجمی مخروطك حجمنه مساوی بولنسون .

مخروطك رأس زاويه‌سنك نصفی هـ ايله كوستريلور ايسه اولا مخروطك سطح مستديری $\pi\,ر^{٢}\,حس\,هـ$ ، ومنطقه سطح مستديری $٢\,\pi\,ر^{٢}\,(١ - تحس\,هـ)$ اولوب مذكور ايكی سطح يكديكرينه مساوی اوله‌جقلرندن

$\pi\,ر^{٢}\,حس\,هـ = ٢\,\pi\,ر^{٢}\,(١ - تحس\,هـ)$ ياخود

$حس\,هـ = ٢\,(١ - تحس\,هـ)$ اشبو معادله ايكنجی قوته رفعدن صكره طرف اولك مثلثاتجه اولان قيمتی وضع ايله

$١ - تحس^{٢}\,هـ = ٤\,(١ - تحس\,هـ)^{٢}$ ياخود

(١ — تحس هـ) (١ + تحس هـ) = ٤ (١ — تحس هـ)$^{٢}$

بوراده

هـ = ٠ حلنه توافق ایدن ١ — تحس هـ ایله اختصار ایدلدکده باقی تحس هـ = $\frac{٣}{٥}$ اولور.

ثانیاً مخروطك حجمی $\frac{١}{٣}$ π نق$^{٣}$ حس$^{٢}$ هـ تحس هـ، وقطعه‌نك حجمی $\frac{١}{٣}$ π نق$^{٣}$ (١ — تحس هـ)$^{٢}$ (٢ + تحس هـ)، اولدقلرندن، مسئله‌نك شرائطی مقتضاسی

حس$^{٢}$ هـ تحس هـ = (١ — تحس هـ)$^{٢}$ (٢ + تحس هـ)

(١ — تحس هـ) (١ + تحس هـ) تحس هـ = (١ — تحس هـ)$^{٢}$
× (٢ + تحس هـ)     یاخود

(١ + تحس هـ) تحس هـ = (١ — تحس هـ) (٢ + تحس هـ)

ویاخود

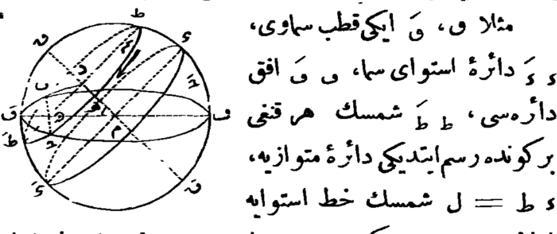
٢ تحس$^{٢}$ هـ — ٢ تحس هـ — ٢ = ٠

تحس هـ = $\frac{١}{٢}$ (— ١ ± $\sqrt{٥}$)   اولور.

جذریه‌نك منفی علامتنه عطف نظر ایده‌رك تحس هـ نك قیمتی وسط وطرفین نسبتی اوزرینه تقسیم اولنان نصف قطرك قسم اطوله مساویدر.

{ مسئله }

٨٤ — استانبولده وهر قنغی بر بلده‌ده مراد اولنانده برکونده کیجه ایله کوندز مدتلرینك تعیینی مطلوبدر.



مثلا ق، قَ ایکی قطب سماوی، ی یَ دائرهٔ استوای سما، ب بَ افق دائره‌سی، ط طَ شمسك هر قنغی برکونده رسم ایتدیکی دائرهٔ متوازیه، ی ط = ل شمسك خط استوایه اولان میلی، م مرکز سما، ه زاویه‌سی عرض بلده فرضیله.

قوزمغرافیاده بیان اولندیغی اوزره شمس دائرهٔ استوای سماویدن ٢٣° ٢٧َ ٣٠ً میله چیقا بیلدیکندن اشبو درجه‌نك تمامی اولان ٦٦° ٣٢َ ٣٠ً عرضنه قدر کیجه ایله کوندز مدتی یکرمی درت ساعت اولور.

کیجه ایله کوندز مدتلری تعریف اولنان عرضلرده تخلف ایدرلر.

ب بَ ذکر اولنان عرضلرده بر محلك دائرهٔ افقی اولدیغنه کوره شمسك برکونده دائرهٔ استوایه موازی رسم ایتدیکی ط طَ دائره‌سی مستویسنی قطع ایده‌جکندن حاصل اولان ب ط ح قوسی کوندزك مدتی، ب طَ ح قوسی دخی کیجه‌نك مدتی

ارائه ایدوب ب ح فصل مشترك خطی اولور.

ب طَ ح = س ، ونصف قطر کره واحد فرضیله

ب ے = ط ے = جب د ط = جب ل

ے ۞ = ب ے جب ب ے طَ = جب ل جب $\frac{س}{۲}$ (۱)

وینه ے ۞ = ے م م ه ، ے م = جب ل

اولدقلرندن ے ۞ = جب ل م ه اولور.

بر رقملی دستور ایله مساویلردن معادله تشکیل اولندقده

جب ل م ه = جب ل جب $\frac{س}{۲}$ وبورادن

جب $\frac{س}{۲}$ = م ل م ه . . . . . (ق)

مثلا مایس رومینك اون بشنده شمسك میلی ۲۱° ۱۵َ ۱۵ً = ل اولدیغندن واستانبولك عرضی ایسه

۴۱° = ه بولندیغنه کوره ق دستوری لغارتمه‌یه تحویل ایله

لع جب $\frac{س}{۲}$ = لع م ۲۱° ۱۵َ ۱۵ً + لع م ۴۱°

لع م ۲۱° ۱۵َ ۱۵ً = ۱,۵۸۹۸۹َ

لع م ۴۱° = ۱,۹۳۹۱۶َ

لع جب $\frac{س}{۲}$ = ۱,۵۲۹۰۵َ

س = ۱۴۰° ۲۸َ ۳۸ً

اشبو مقدار شمسك غروبيله طلوعنه قدر كيجه مدتی
اولوب شمس ايسه يكرمی درت ساعتده بر كره دور ايلديكندن

٢٤ع : ٣٦٠° = عع : ١٤٠° ٢٨′ ٣٨″

نسبتی تنظيم وحل اولندقده

يوم مذكورده كيجه‌نك مدتی ٩ع ٢١′ ٥٢″ اشبو مقدار
يكرمی درت ساعتدن طرح ايله كوندزك مدتی ١٤ع ٣٨′ ٨″
تقريباً اولور .

مارت رومينك يكرمی طقوزنده ٨٠° عرضنده‌كی محلك
كوندز مدتی بالحساب تقريباً ١٨° ٥١′ بولنور .

اكر تم ل تم ه > ١ ياخود ه > ٩٠° — ل فرض اولنور
ايسه س ايچون آرتق حقيقی قيمت تحصيل اولنمز . شكلدن
آكلاشيله‌جغی اوزره تصور اولنان محل دائرهٔ قطبينك فوقنده
اولدقجه بومسئلتنا حال بر قيمت ارائه ايتميوب همان انجق دائرهٔ
قطبی ايله خط استوا بيننده‌كی محللر ايچون حساب اولنور .

# ذیل مثلثات

## مثلثات جدوللری واسطه‌سیله درجهٔ ثانیه معادله‌لرینك اصول حلی و مواوری دستورلری

—

### (١) — ایکنجی درجه معادلاتی

**٨٥** — $\text{س}^{2} + \text{ح}\,\text{س} + \text{ء} = 0$ شکلنه ارجاع اولنمش درجهٔ ثانیه معادله‌سنك جذرلری .

$$\text{س} = -\frac{\text{ح}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{ح}^{2}}{4} - \text{ء}} \quad (1)$$

مناسبتیله تعین ایدر .

اشبو دستوری لغارتمه واسطه‌سیله قابل حل بر صورته ارجاع ایتمك ایچون

$$\text{س} = -\frac{\text{ح}}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\,\text{ء}}{\text{ح}^{2}}}\right) \quad (2)$$

صورتنه بعد الوضع

جذرلر حقیقی یعنی $1 - \frac{4\,\text{ء}}{\text{ح}^{2}} > 0$ . اولدیغنه نظراً $\text{ء} > 0$ . و $\text{ء} < 0$. مثللو ایکی حال ظهور ایدر :

حال اوله کوره اکر ء صفردن اعظم اولور ایسه $\frac{4\,\text{ء}}{\text{ح}^{2}}$ حدی مثبت و واحددن کوچك اولمسیله

$\text{حس}^{2}\,\text{ه} = \frac{4\,\text{ء}}{\text{ح}^{2}}$ وضع اولنه‌بیلوب بومعادله‌ده ه ایچون لغارتمه

ایله قابل حل بر قیمت حقیقیه تحصیل اولنور . (۲) رقملی دستورده محلنه وضعیله س = — (۱ ± √(۱ — حس^۲ ه)) =
— ح/۲ (۱ ± تحس ه) بولنه‌رق جذرلری بالتفریق

س' = — ح/۲ (۱ + تحس ه) = — تحس^۲ ح ه/۲

س'' = — ح/۲ (۱ — تحس ه) = — حس^۲ ح ه/۲

اولور .

حال ثانی‌یه کوره د منفی اولمغله — ٤د/ح^۲ حدی مثبت اولرق (۲) رقملی دستورده م^۲ ه = — ٤د/ح^۲ فرض ووضع اولنه‌بیلوب بو حالده

س = — ح/۲ (۱ ± √(۱ + م^۲ ه)) = — ح/۲ (۱ + قع ه)
= — ح/۲ (۱ + ۱/تحس ه) اولوب جذرلری بالتفریق

س' = — ح/۲ ((تحس ه + ۱)/(تحس ه)) = — ح/۲ × (۲ تحس^۲ ۱/۲ ه)/(تحس ه)

= — (ح تحس^۲ ح/۲)/(تحس ه)

س'' = — ح/۲ ((تحس ه — ۱)/(تحس ه)) = ح/۲ × (۲ حس^۲ ۱/۲ ه)/(تحس ه)

= (ح حس^۲ ه/۲)/(تحس ه) اولور .

٨٦ — مواوورى « Moivre » دستورلرى. ذو حدين معادله‌لر.

ب + ح √‾‾‾١ مثللو محدث بر تعبيرده ب = ه محس ة، ح = ه حس ة فرض ووضع اولنور ايسه

ه (محس ة + √‾‾‾١ حس ة) اشبو تعبير

هَ (محس ط + √‾‾‾١ حس ط) تعبيريله ضرب اولنورسه

ه هَ {محس (ة + ط) + حس (ة + ط) √‾‾‾١}

اكر ايكى حد مساوى اولدقلرى تقديرده حاصل ضربلرى

[ه (محس ة + حس ة √‾‾‾١)]^٢ = ه^٢ (محس ٢ة + حس ٢ة √‾‾‾١) اولور.

اوچ مساوى حدك عين وجهله حاصل ضربى

[ه (محس ة + حس ة √‾‾‾١)]^٣ = ه^٣ (محس ٣ة + حس ٣ة √‾‾‾١)

عموميتله م قدر مساوى حدلرك حاصل ضربى دخى

[ه (محس ة + حس ة √‾‾‾١)]^م = ه^م (محس م ة + حس م ة √‾‾‾١) اولوب م كرك مثبت وكرك منفى كسر قوته رفعنده دخى صحيح اولديغى علم جبرده اثبات اولنمشدر.

٨٧ — مذكور دستور واسطه‌سيله محس ة، حس ة

یاخود مم ه تابعلریله حس م ه ، محس م ه ، مم م ه تابعلری افاده اولنه‌بیلور .

دستور مذکورده ه = ۱ اوله‌رق یازلدقده

(محس ه + حس ه √(— ۱))^۲ = محس م ه +

حس م ه √(— ۱) ذوحدین قاعده‌سنه تطبیقاً صاغ طرف توسیع اولندقده حاصل رفع صول طرفه مساوی یعنی قسم حقیقیلر طرف طرفه مساوی و قسم محدثلر کذا طرف طرفه مساوی اوله‌جقلرندن

محس م ه = محس^م ه — [م (م — ۱)] / [۱ × ۲] محس^(م—۲) ه حس^۲ ه +

[م (م — ۱) (م — ۲) (م — ۳)] / [۱ × ۲ × ۳ × ٤] محس^(م—٤) ه حس^٤ ه .... (ب)

و حس م ه = م محس^(م—۱) ه حس ه —

[م (م — ۱) (م — ۲)] / [۱ × ۲ × ۳] محس^(م—۳) ه حس^۳ ه + .... (ج)

ج ، ب دستورلری طرف طرفه تقسیم اولندقده

مم م ه = [م مم ه — (م (م — ۱) (م — ۲)) / (۱ × ۲ × ۳) مم^۳ ه + .....] / [۱ — (م (م — ۱)) / (۱ × ۲) مم^۲ ه + (م (م — ۱) (م — ۲) (م — ۳)) / (۱ × ۲ × ۳ × ٤) مم^٤ ه — ..] ... (د)

استحصال اولنان اوچ دستورده م کسر اولور یاخود ۱/م مه تحویل اولنور ایسه قوسلرك تقسیمنده حس ، محس ، مم تابعلری تحصیل اولنور .

مثلا ظل ه تابعیله ظل $\frac{1}{4}$ ه تابعی تعیین اولنمق استنلدکده (د) دستورنده

$$\text{ظل ٤ ه} = \frac{\text{٤ ظل ه} - \text{٤ ظل}^{3}\text{ ه}}{\text{١} - \text{٦ ظل}^{2}\text{ ه} + \text{ظل}^{4}\text{ ه}}$$

ظل ٤ ه = ح ، ظل ه = س وضع ایدەرك

ح س$^{4}$ + ٤ س$^{3}$ − ٦ ح س$^{2}$ − ٤ س + ح = ٠

معادلهٔ متقابلهسی کوجلکسز حل اولنور .

٨٨ — مواوری دستوری واسطهسیله ذوحدیندن عبارت هر درجه معادلهلرینك جذرلرینی بولمقده سهولت واردر .

مثلا ذوحدیندن عبارت بشنجی درجهدن

س$^{5}$ − ١ = ٠ . معادلهسنده

س = تجب ه + جب ه $\sqrt{-1}$ وضعیله مذکور معادله

تجب ٥ ه + جب ٥ ه $\sqrt{-1}$ = ١ اولوب بو حالده

تجب ٥ ه = ١ ، جب ٥ ه = ٠ . اولهجغنه بناء

٥ ه = ٢ ق $\pi$ اولوب وبورادن

ه = $\frac{\text{٢ ق}\pi}{\text{٥}}$ اولور .

ق محلنه ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، وضع ایدەرك

ق = ٠ ، ه = ٠ ، س$_{1}$ = ١

ق = ١ ، ه = $\frac{2\pi}{5}$ ، س$_{2}$ = تجب $\frac{2\pi}{5}$ + جب $\frac{2\pi}{5}$ $\sqrt{-1}$

ق = ٢، ﻫ = ٤π/٥، س٣ = تحس ٤π/٥ + حس ٤π/٥ √−١

. . . . . . . . . . . اولور.

مثال دیکر. ینه بویله‌جه.

س١٥ − ١ = ٠، معادله‌سنده

س = تحس ﻫ + حس ﻫ √−١ وضعیله

تحس ١٥ ﻫ + حس ١٥ ﻫ √−١ = ١ اولوب

تحس ١٥ ﻫ = ١، حس ١٥ ﻫ = ٠ اوله‌جغندن

١٥ ﻫ = ٢ ق π، بورادن ﻫ = ٢قπ/١٥ اولور.

مذکور معادله، س = تحس ٢قπ/١٥ + حس ٢قπ/١٥ √−١

دستوریله حل اولنور. اشبو دستورده ق محلنه ٠، ١، ٢، . . . . ١٤ قیمتلری وضع ایده‌رك س مجهولنك جذرلری استحصال اولنور.

عمومیتله سم − ١ = ٠ معادله‌سنده

س = تحس ٢قπ/م + حس ٢قπ/م √−١ وضعیله

و ق محلنه ٠، ١، ٢، . . . . . م − ١ قیمتلرینی قویه‌رق جذرلری تعیین اولنور.

٨٩ — ذوحدیندن عبارت معادله‌نك جذرلری خواص مشهوره حاصل ایدرلر.

(١) ب = تحس ٢π/م + حس ٢π/م √−١ النه‌جق

اولور ایسه مواوری دستوری واسطه‌سیله

$ب^ق = $ جب $\frac{۲ ق \pi}{م} + $ حب $\frac{۲ ق \pi}{م} \sqrt{-۱}$ اولوب

$س^م - ۱ = ۰$ ، معادله‌سنك م عدد جذرلری

$ب^۰$ ، $ب^۱$ ، $ب^۲$ ، . . . . . . $ب^{م-۱}$ ایله یعنی جـذرلردن برینك قوتلریله کوستریلوب

قوای متوالیـه‌سی دیکر جذرلری حاصل ایدن جذرلره اصلی جذرلر تعبیر اولنور . اکر م قوتی عدد اصلیدن اولور ایسـه واحده مسـاوی اولان جذردن ماعـدا جذرلر اصلی جذرلر اولورلر .

(۲) اکر م = ط ل فرض اولنوب ل ایسه یکدیکرینه نظراً ایکی عدد اصلی اولمسیله $س^م - ۱ = ۰$ معادله‌سـنك هر جذری

$س^ط - ۱ = ۰$ معادله‌سنك ط قدر جذرینك $س^ل - ۱ = ۰$ معادله‌سنك ل قدر جذریله حاصل ضربنه مساوی اولور.

چونکه $س^{ط ل} - ۱ = ۰$ معادله‌سنك برجذری

$ب = $ جب $\frac{۲ ق \pi}{ط ل} + $ حب $\frac{۲ ق \pi}{ط ل} \sqrt{-۱}$ اولسون.

بوحالده $ل ے + ط ی = ق$ یاخود

$\frac{۲ ے \pi}{ط} + \frac{۲ ی \pi}{ل} = \frac{۲ ق \pi}{ط ل}$ اولمق اوزره ے، ی کبی

ایکی عدد تام بولنه‌بیلوب بوصورتده

$ب = ($جب $\frac{۲ ے \pi}{ط} + $ حب $\frac{۲ ے \pi}{ط} \sqrt{-۱}) \times$

$($جب $\frac{۲ ی \pi}{ل} + $ حب $\frac{۲ ی \pi}{ل} \sqrt{-۱})$

اولورکه $س^{طل}$ — ۱ = . معادله‌سنك هر جذری $س^{ط}$ — ۱ = . معادله‌سنك برجذریله $س^{ل}$ — ۱ = . معادله‌سنك برجذرینه حاصل ضربنه مساوی اولوب بوحالده $س^{طل}$ — ۱ = . معادله‌سنك ط ل عدد جذرلری $س^{ط}$ — ۱ = . معادله‌سنك ط قدر تعیین اولنان جذرینك $س^{ل}$ — ۱ = . معادله‌سنك ل قدر تحصیل قلنان جذرینه حاصل ضربندن عبارتدر.

عمومیتله $س^{م}$ — ۱ = . معادله‌سنك جبر ایله حلی مذکور معادله‌ده م اولکی حدلرك بر حاصل ضربی اولدیغندن قواعد جبریه ایله حلی م قدر حدلرك قوتنده وعین شکلده برمعادله‌نك حلنه ارجاع اولنور .

۹۰ — سائر تطبیقلر. مواوری دستورلری غایت معروف سائر تطبیقاتده خدمت ایدرلر.

مثلا بوقاروده‌کی (ب) ، (ح) دستورلرنده طرف ثانیلر $جب^{م}$ ه حد مشترکنه النه‌رق

$$جب\ م\ ه = جب^{م}\ ه \left[ ۱ - \frac{م\ (م - ۱)}{۱ \times ۲}\ مم^{۲}\ ه + \frac{م\ (م - ۱)\ (م - ۲)\ (م - ۳)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ٤}\ مم^{٤}\ ه - \ldots \right]$$

$$وحب\ م\ ه = جب^{م}\ ه \left[ م\ مم\ ه - \frac{م\ (م - ۱)\ (م - ۲)}{۱ \times ۲ \times ۳}\ مم^{۳}\ ه + \frac{م\ (م - ۱)\ (م - ۲)\ (م - ۳)\ (م - ٤)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ٤ \times ٥}\ مم^{٥}\ ه - \ldots \right]$$

$\text{م}\,\text{ه} = \text{س}$ وضعیله بورادن $\text{م} = \frac{\text{س}}{\text{ه}}$ اولوب مذکور دستورلر

$$\text{جس}\,\text{س} = \text{جس}^{\text{م}}\,\text{ه}\left[ - \frac{\text{س}\,(\text{س} - \text{ه})}{١ \times ٢} \cdot \frac{\text{مم}^{٢}\,\text{ه}}{\text{ه}^{٢}} + \frac{\text{س}\,(\text{س} - \text{ه})\,(\text{س} - ٢\text{ه})\,(\text{س} - ٣\text{ه})}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} \cdot \frac{\text{مم}^{٣}\,\text{ه}}{\text{ه}^{٤}} - \cdot\cdot \right]$$

$$\text{وحب}\,\text{س} = \text{جس}^{\text{م}}\,\text{ه}\left[\text{س} \cdot \frac{\text{مم}\,\text{ه}}{\text{ه}} - \frac{\text{س}\,(\text{س} - \text{ه})\,(\text{س} - ٢\text{ه})}{١ \times ٢ \times ٣} \cdot \frac{\text{مم}^{٣}\,\text{ه}}{\text{ه}^{٤}} + \cdot\cdot\cdot\cdot \right]$$

اولوب ه صفره ارجاع اولندقده س غیر متحول قالەرق غایەسنده $\frac{\text{مم}\,\text{ه}}{\text{ه}} = ١$ ، و $\text{جس}^{\text{م}}\,\text{ه} = ١$ وبونی متعاقب

$$\text{جس}\,\text{س} = ١ - \frac{\text{س}^{٢}}{١ \times ٢} + \frac{\text{س}^{٤}}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} - \frac{\text{س}^{٦}}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦} + \cdot\cdot\cdot \quad (١)$$

$$\text{حب}\,\text{س} = \text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{١ \times ٢ \times ٣} + \frac{\text{س}^{٥}}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥} - \frac{\text{س}^{٧}}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧} + \cdot\cdot\cdot\cdot \quad (٢)$$

علم جبرده سائر اصوللر ايله تحصيل اولنه‌بيلان اشبو سلسله‌لر قوس تابعيله بر قوسك جيب، وتمام جيبنی حساب ايدرلر.

(٢) رقملی سلسله غايت متقارب اولديغندن اوچ حددن صكره كلان حدلردن صرف نظر اولنه‌بيلور وبو حالده

$س — حس\ س = \frac{س^{٣}}{٦} — \frac{س^{٥}}{١٢٠}$ اولوب اشته طقسان درجه‌دن غايت كوچك اولان بر قوس ايله جيبی بيننده‌كی فضل قوس مذكور مكعبنك سدسندن اصغر اولور.

عين وجهله (١) رقملی دستور تمام جيب ايله $١ — \frac{ق^{٢}}{٢}$ بيننده‌كی فضل $\frac{ق^{٤}}{٢٤}$ دن يعنی قوسك دردنجی قوتنك يكرمی‌درتده برندن اصغر اولديغنی كوسترر.

(١) رقملی دستورده $س = \frac{\pi}{٢}$ وضع ايديلور ايسه سلسله‌نك برنجی طرفی صفره مساوی اوله‌رق بعده $س^{٢}$ يرينه $\frac{١}{ع}$ قونور ايسه $\frac{١}{٢}$ $\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ اولوب $ع^{م}$ ايله ضرب اولندقده

$$ع^{م} — \frac{ع^{م-١}}{٢} + \frac{ع^{م-٢}}{٢٤} — \frac{ع^{م-٣}}{٧٢٠} ... = ٠$$ اوله‌رق

اشبو معادله‌نك جذرلری $\frac{١}{٢}$ $\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ نك تك مضاعفنه، مجموعی اشارتنك عكسيله حد ثانی امثالنه مساوی اولور. بو حالده

$$\cdots\cdots + \frac{١}{(\frac{\pi ٥}{٢})^{٢}} + \frac{١}{(\frac{\pi ٣}{٢})^{٢}} + \frac{١}{(\frac{\pi}{٢})^{٢}} = \frac{١}{٢}$$ ياخود

$$(٣) \quad \cdots\cdots + \frac{١}{٩^{٢}} + \frac{١}{٧^{٢}} + \frac{١}{٥^{٢}} + \frac{١}{٣^{٢}} + ١ = \frac{\pi^{٢}}{٨}$$

اشبو سلسله $\pi$ نك قيمت عدديه‌سنى حسابه خدمت ايدر .
مذكور سلسله‌دن غايت متقارب سلسله‌لر استخراج اولنور. مثلا

$$م = \cdots + \frac{١}{٤^{٢}} + \frac{١}{٣^{٢}} + \frac{١}{٢^{٢}} + \frac{١}{١^{٢}}$$

$$\frac{م}{٤} = \cdots + \frac{١}{٨^{٢}} + \frac{١}{٦^{٢}} + \frac{١}{٤^{٢}} + \frac{١}{٢^{٢}}$$ اولوب

ايكنجى برنجيدن طرح ايله

$$\frac{\pi^{٢}}{٨} = \cdots\cdots + \frac{١}{٧^{٢}} + \frac{١}{٥^{٢}} + \frac{١}{٣^{٢}} + ١ = \frac{م}{٤} - م$$

و $م = \frac{\pi^{٢}}{٦}$ اولوب بو حالده

$$(٤) \quad \cdots\cdots + \frac{١}{٥^{٢}} + \frac{١}{٤^{٢}} + \frac{١}{٣^{٢}} + \frac{١}{٢^{٢}} + ١ = \frac{\pi^{٢}}{٦}$$

اولور .

## بردن اون بیکه قدر اعداد اصلیه ولغارتمه‌لری

| عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١ | ٠٠٠٠٠ | ٢١١ | ٣٢٤٢٨ | ٤٩١ | ٦٩١٠٨ | ٨١١ | ٩٠٩٠٢ | ١١١٧ | ٤٨٠٥ |
| ٢ | ٣٠١٠٣ | ٢٢٣ | ٤٨٣٠ | ٩٩ | ٩٨١٠ | ٢١ | ١٤٣٤ | ٢٣ | ٥٠٣٨ |
| ٣ | ٤٧٧١٢ | ٢٢٧ | ٥٦٠٣ | ٥٠٣ | ٧٠١٥٧ | ٢٣ | ١٥٤٠ | ٢٩ | ٥٢٦٩ |
| ٥ | ٦٩٨٩٧ | ٢٩ | ٥٩٨٤ | ٠٩ | ٠٦٧٢ | ٢٧ | ١٧٥١ | ٥١ | ٦١٠٨ |
| ٧ | ٨٤٥١٠ | ٣٣ | ٦٧٣٦ | ٢١ | ١٦٨٤ | ٢٩ | ١٨٥٥ | ٥٣ | ٦١٨٣ |
| ١١ | ٠٤١٣٩ | ٣٩ | ٧٨٤٠ | ٢٣ | ١٨٥٠ | ٣٩ | ٢٣٧٦ | ٦٣ | ٦٥٥٨ |
| ١٣ | ١١٣٩٤ | ٤١ | ٨٢٠٢ | ٤١ | ٣٢٢٠ | ٥٣ | ٣٠٩٥ | ٧١ | ٦٨٥٦ |
| ١٧ | ٢٣٠٤٥ | ٥١ | ٩٩٦٧ | ٤٧ | ٣٧٩٩ | ٥٧ | ٣٢٩٨ | ٨١ | ٧٢٢٥ |
| ١٩ | ٢٧٨٧٥ | ٥٧ | ٤٠٩٩٣ | ٥٧ | ٤٥٨٦ | ٥٩ | ٣٣٩٩ | ٨٧ | ٧٤٤٥ |
| ٢٣ | ٣٦١٧٣ | ٦٣ | ١٩٩٦ | ٦٣ | ٥٠٥١ | ٦٣ | ٣٦٠١ | ٩٣ | ٧٦٦٤ |
| ٢٩ | ٤٦٢٤٠ | ٦٩ | ٢٩٧٥ | ٦٩ | ٥٥١١ | ٧٧ | ٤٣٠٠ | ١٢٠١ | ٧٩٥٤ |
| ٣١ | ٤٩١٣٦ | ٧١ | ٣٢٩٧ | ٧١ | ٥٦٦٤ | ٨١ | ٤٤٩٨ | ١٣ | ٨٣٨٦ |
| ٣٧ | ٥٦٨٢٠ | ٧٧ | ٤٢٤٨ | ٧٧ | ٦١١٨ | ٨٣ | ٤٥٩٦ | ١٧ | ٨٥٢٩ |
| ٤١ | ٦١٢٧٨ | ٨١ | ٤٨٧١ | ٨٧ | ٦٨٦٤ | ٨٧ | ٤٧٩٢ | ٢٣ | ٨٧٤٣ |
| ٤٣ | ٦٣٣٤٧ | ٨٣ | ٥١٧٩ | ٩٣ | ٧٣٠٥ | ٩٠٧ | ٥٧٦١ | ٢٩ | ٨٩٥٥ |
| ٤٧ | ٦٧٢١٠ | ٢٩٣ | ٦٧٨٧ | ٩٩ | ٧٧٤٣ | ١١ | ٥٩٥٢ | ٣١ | ٩٠٢٦ |
| ٥٣ | ٧٢٤٢٨ | ٣٠٧ | ٨٧١٤ | ٦٠١ | ٧٨٨٧ | ١٩ | ٦٣٣٢ | ٣٧ | ٩٢٣٧ |
| ٥٩ | ٧٧٠٨٥ | ١١ | ٩٢٧٦ | ٠٧ | ٨٣١٩ | ٢٩ | ٦٨٠٢ | ٤٩ | ٩٦٥٦ |
| ٦١ | ٧٨٥٣٣ | ١٣ | ٩٥٥٤ | ١٣ | ٨٧٤٦ | ٣٧ | ٧١٧٤ | ٥٩ | ١٠٠٠٣ |
| ٦٧ | ٨٢٦٠٧ | ١٧ | ٥٠١٠٦ | ١٧ | ٩٠٢٩ | ٤١ | ٧٣٥٩ | ٧٧ | ٠٦١٩ |
| ٧١ | ٨٥١٢٦ | ٣١ | ١٩٨٣ | ١٩ | ٩١٦٩ | ٤٧ | ٧٦٣٥ | ٧٩ | ٠٦٨٧ |
| ٧٣ | ٨٦٣٣٢ | ٣٧ | ٢٧٦٣ | ٣١ | ٨٠٠٠٣ | ٥٣ | ٧٩٠٩ | ٨٣ | ٠٨٢٣ |
| ٧٩ | ٨٩٧٦٣ | ٤٧ | ٤٠٣٣ | ٤١ | ٠٦٨٦ | ٦٧ | ٨٥٤٣ | ٨٩ | ١٠٢٥ |
| ٨٣ | ٩١٩٠٨ | ٤٩ | ٤٢٨٣ | ٤٣ | ٠٨٢١ | ٧١ | ٨٧٢٢ | ٩١ | ١٠٩٣ |
| ٨٩ | ٩٤٩٣٩ | ٥٣ | ٤٧٧٧ | ٤٧ | ١٠٩٠ | ٧٧ | ٨٩٨٩ | ٩٧ | ١٢٩٤ |
| ٩٧ | ٩٨٦٧٧ | ٥٩ | ٥٥٠٩ | ٥٣ | ١٤٩١ | ٨٣ | ٩٢٥٥ | ١٣٠١ | ١٤٢٨ |
| ١٠١ | ٠٠٠٤٣٢ | ٦٧ | ٦٤٦٧ | ٥٩ | ١٨٨٩ | ٩١ | ٩٦٠٧ | ٠٣ | ١٤٩٤ |
| ٣ | ٠١٢٨٤ | ٧٣ | ٧١٧١ | ٦١ | ٢٠٢٠ | ٩٧ | ٩٨٧٠ | ٠٧ | ١٦٢٨ |
| ٧ | ٠٢٩٣٨ | ٧٩ | ٧٨٦٤ | ٧٣ | ٢٨٠٢ | ١٠٠٩ | ٠٣٨٩ | ١٩ | ٢٠٢٤ |
| ٩ | ٠٣٧٤٣ | ٨٣ | ٨٣٢٠ | ٧٧ | ٣٠٥٩ | ١٣ | ٠٥٦١ | ٢١ | ٢٠٩٠ |
| ١٣ | ٠٥٣٠٨ | ٨٩ | ٨٩٩٥ | ٨٣ | ٣٤٤٢ | ١٩ | ٠٨١٧ | ٢٧ | ٢٢٨٧ |
| ٢٧ | ١٠٣٨٠ | ٩٧ | ٩٨٧٩ | ٩١ | ٣٩٤٨ | ٢١ | ٠٩٠٣ | ٦١ | ٣٣٨٦ |
| ٣١ | ١١٧٢٧ | ٤٠١ | ٦٠٣٦٤ | ٧٠١ | ٤٥٧٢ | ٣١ | ١٣٢٦ | ٦٧ | ٣٥٧٧ |
| ٣٧ | ١٣٦٧٢ | ٩ | ١١٧٢ | ٠٩ | ٥٠٦٥ | ٣٣ | ١٤١٠ | ٧٣ | ٣٧٦٧ |
| ٣٩ | ١٤٣٠١ | ١٩ | ٢٢٢١ | ١٩ | ٥٦٧٣ | ٣٩ | ١٦٦٢ | ٨١ | ٤٠١٩ |
| ٤٩ | ١٧٣١٩ | ٢١ | ٢٤٢٨ | ٢٧ | ٦١٥٣ | ٤٩ | ٢٠٧٨ | ٩٩ | ٤٥٨٢ |
| ٥١ | ١٧٨٩٨ | ٣١ | ٣٤٤٨ | ٣٣ | ٦٥١٠ | ٥١ | ٢١٦٠ | ١٤٠٩ | ٤٨٩١ |
| ٥٧ | ١٩٥٩٠ | ٣٣ | ٣٦٤٩ | ٣٩ | ٦٨٦٤ | ٦١ | ٢٥٧٢ | ٢٣ | ٥٣٢٠ |
| ٦٣ | ٢١٢١٩ | ٣٩ | ٤٢٤٦ | ٤٣ | ٧٠٩٩ | ٦٣ | ٢٦٥٣ | ٢٧ | ٥٤٤٢ |
| ٦٧ | ٢٢٢٧٢ | ٤٣ | ٤٦٤٠ | ٥١ | ٧٥٦٤ | ٦٩ | ٢٨٩٨ | ٢٩ | ٥٥٠٣ |
| ٧٣ | ٢٣٨٠٥ | ٤٩ | ٥٢٢٥ | ٥٧ | ٧٩١٠ | ٨٧ | ٣٦٢٣ | ٣٣ | ٥٦٢٥ |
| ٧٩ | ٢٥٢٨٥ | ٥٧ | ٥٩٩٢ | ٦١ | ٨١٣٨ | ٩١ | ٣٧٨٢ | ٣٩ | ٥٨٠٦ |
| ٨١ | ٢٥٧٦٨ | ٦١ | ٦٣٧٠ | ٦٩ | ٨٥٩٣ | ٩٣ | ٣٨٦٢ | ٤٧ | ٦٠٤٧ |
| ٩١ | ٢٨١٠٣ | ٦٣ | ٦٥٥٨ | ٧٣ | ٨٨١٨ | ٩٧ | ٤٠٢١ | ٥١ | ٧١٦٧ |
| ٩٣ | ٢٨٥٥٦ | ٦٧ | ٦٩٣٢ | ٨٧ | ٩٥٩٧ | ١١٠٣ | ٤٢٥٨ | ٥٣ | ٦٢٢٧ |
| ٩٧ | ٢٩٤٤٧ | ٧٩ | ٨٠٣٤ | ٩٧ | ٩٠١٤٦ | ١١٠٩ | ٤٤٩٣ | ٥٩ | ٦٤٠٦ |
| ١٩٩ | ٢٩٨٨٥ | ٤٨٧ | ٨٧٥٣ | ٨٠٩ | ٠٧٩٥ | $\pi$ | ٤٩٧١٥ | ١٤٧١ | ٦٧٦١ |

بردن اون بیكه قدر اعداد اصلیه و لغارتمه‌لری

| عدد | لغارتمه | عدد | لغاوتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١٤٨١ | ١٧٠٥٦ | ١٨٢٢ | ٢٦٠٧٩ | ٢٢٠٣ | ٣٤٣٠١ | ٢٥٥٧ | ٤٠٨٧٣ | ٢٩١٧ | ٤٦٤٩٤ |
| ٨٣ | ١١٤ | ٣١ | ٢٦٩ | ٠٧ | ٣٨٠ | ٧٩ | ٤١١٤٥ | ٢٧ | ٦٤٢ |
| ٨٧ | ٢٣١ | ٤٧ | ٦٤٧ | ١٣ | ٤٩٨ | ٩١ | ٣٤٧ | ٣٩ | ٨٢٠ |
| ٨٩ | ٢٨٩ | ٦١ | ٩٧٥ | ٢١ | ٦٥٥ | ٩٣ | ٣٨٠ | ٥٣ | ٤٧٠٢٦ |
| ٩٣ | ٤٠٦ | ٦٧ | ٢٧١١٤ | ٣٧ | ٩٦٧ | ٢٦٠٩ | ٦٤٧ | ٥٧ | ٠٨٥ |
| ٩٩ | ٥٨٠ | ٧١ | ٢٠٧ | ٣٩ | ٣٥٠٠٥ | ١٧ | ٧٨٠ | ٦٣ | ١٧٣ |
| ١٥١١ | ٩٢٦ | ٧٣ | ٢٥٤ | ٤٣ | ٠٨٣ | ٢١ | ٨٤٧ | ٦٩ | ٢٦١ |
| ٢٣ | ١٨٢٧٠ | ٧٧ | ٣٤٦ | ٥١ | ٢٣٨ | ٣٣ | ٤٢٠٤٥ | ٧١ | ٢٩٠ |
| ٣١ | ٤٩٨ | ٧٩ | ٣٩٣ | ٦٧ | ٥٤٥ | ٤٧ | ٢٧٥ | ٩٩ | ٦٩٨ |
| ٤٣ | ٨٣٧ | ٨٩ | ٦٢٣ | ٦٩ | ٥٨٣ | ٥٧ | ٤٣٩ | ٣٠٠١ | ٧٢٧ |
| ٤٩ | ١٩٠٠٥ | ١٩٠١ | ٨٩٨ | ٧٣ | ٦٦٠ | ٥٩ | ٤٧٢ | ١١ | ٨٧١ |
| ٥٣ | ١١٧ | ٠٧ | ٢٨٠٣٥ | ٨١ | ٨١٣ | ٦٣ | ٥٣٧ | ١٩ | ٩٨٦ |
| ٥٩ | ٢٨٥ | ١٣ | ١٧١ | ٨٧ | ٩٢٧ | ٧١ | ٦٦٧ | ٢٣ | ٤٨٠٤٤ |
| ٦٧ | ٥٠٧ | ٣١ | ٥٧٨ | ٩٣ | ٣٦٠٤٠ | ٧٧ | ٧٦٥ | ٣٧ | ٢٤٤ |
| ٧١ | ٦١٨ | ٣٣ | ٦٢٣ | ٩٧ | ١١٦ | ٨٣ | ٨٦٢ | ٤١ | ٣٠٢ |
| ٧٩ | ٨٣٨ | ٤٩ | ٩٨١ | ٢٣٠٩ | ٣٤٢ | ٨٧ | ٩٢٧ | ٤٩ | ٤١٦ |
| ٨٣ | ٩٤٨ | ٥١ | ٢٩٠٢٦ | ١١ | ٣٨٠ | ٨٩ | ٩٥٩ | ٦١ | ٥٨٦ |
| ٩٧ | ٢٠٣٣٠ | ٧٣ | ٥١٣ | ٣٣ | ٧٩١ | ٩٣ | ٤٣٠٢٤ | ٦٧ | ٧٦١ |
| ١٦٠١ | ٤٣٩ | ٧٩ | ٦٤٥ | ٣٩ | ٩٠٣ | ٩٩ | ١٢٠ | ٧٩ | ٨٤١ |
| ٠٧ | ٦٠٢ | ٨٧ | ٨٢٠ | ٤١ | ٩٤٠ | ٢٧٠٧ | ٢٤٩ | ٨٣ | ٨٩٧ |
| ٠٩ | ٦٥٦ | ٩٣ | ٩٥١ | ٤٧ | ٣٧٠٥١ | ١١ | ٣١٣ | ٨٩ | ٩٨٢ |
| ١٣ | ٧٦٣ | ٩٧ | ٣٠٠٢٨ | ٥١ | ١٢٥ | ١٣ | ٣٤٥ | ٣١٠٩ | ٤٩٢٦٢ |
| ١٩ | ٩٢٥ | ٩٩ | ٠٨١ | ٥٧ | ٢٣٦ | ١٩ | ٤٤١ | ١٩ | ٤٠٢ |
| ٢١ | ٩٧٨ | ٢٠٠٣ | ١٦٨ | ٧١ | ٤٩٣ | ٢٩ | ٦٠٠ | ٢١ | ٤٣٩ |
| ٢٧ | ٢١١٣٩ | ١١ | ٣٤١ | ٧٧ | ٦٠٣ | ٣١ | ٦٢٢ | ٣٧ | ٦٥١ |
| ٣٧ | ٤٠٥ | ١٧ | ٤٧١ | ٨١ | ٦٧٦ | ٤١ | ٧٩١ | ٦٣ | ٥٠٠١٠ |
| ٥٧ | ٩٢٢ | ٢٧ | ٦٨٥ | ٨٣ | ٧١٢ | ٤٩ | ٩١٧ | ٦٧ | ٠٦٥ |
| ٦٣ | ٢٢٠٨٩ | ٢٩ | ٧٢٨ | ٨٩ | ٨٢٢ | ٥٣ | ٩٨١ | ٦٩ | ٠٩٢ |
| ٦٧ | ١٩٤ | ٣٩ | ٩٤٢ | ٩٣ | ٨٩٤ | ٦٧ | ٤٤٢٠١ | ٨١ | ٢٥٦ |
| ٦٩ | ٢٤٦ | ٥٣ | ٣١٢٢٩ | ٩٩ | ٣٨٠٠٣ | ٧٧ | ٣٥٨ | ٨٧ | ٣٢٨ |
| ٩٣ | ٨٦٦ | ٦٣ | ٤٥٠ | ٢٤١١ | ٢٢٠ | ٨٩ | ٥٤٥ | ٩١ | ٣٩٣ |
| ٩٧ | ٩٦٨ | ٦٩ | ٥٧٦ | ١٧ | ٣٢٨ | ٩١ | ٥٧٦ | ٣٢٠٣ | ٥٥٦ |
| ٩٩ | ٢٣٠١٩ | ٨١ | ٨٢٧ | ٢٣ | ٤٢٥ | ٩٧ | ٦٦٩ | ٠٩ | ٦٣٧ |
| ١٧٠٩ | ٢٧٤ | ٨٣ | ٨٦٩ | ٣٧ | ٦٨٦ | ٢٨٠١ | ٧٣١ | ١٧ | ٧٤٥ |
| ٢١ | ٥٧٨ | ٨٧ | ٩٥٢ | ٤١ | ٧٥٧ | ٠٣ | ٧٦٢ | ٢١ | ٧٩٩ |
| ٢٣ | ٦٢٩ | ٨٩ | ٩٩٤ | ٤٧ | ٨٦٣ | ١٩ | ٤٥٠١٠ | ٢٩ | ٩٠٧ |
| ٣٣ | ٨٨٠ | ٩٩ | ٣٢٢٠١ | ٥٩ | ٣٩٠٧٦ | ٣٣ | ٢٢٥ | ٥١ | ٥١٢٠٢ |
| ٤١ | ٢٤٠٨٠ | ٢١١١ | ٤٤٩ | ٦٧ | ٢١٧ | ٣٧ | ٢٨٦ | ٥٣ | ٢٢٨ |
| ٤٧ | ٢٢٩ | ١٣ | ٤٩٠ | ٧٣ | ٣٢٢ | ٤٣ | ٣٧٨ | ٥٧ | ٢٨٢ |
| ٥٣ | ٣٧٨ | ٢٩ | ٨١٨ | ٧٧ | ٣٩٣ | ٥١ | ٥٠٠ | ٥٩ | ٣٠٨ |
| ٥٩ | ٥٢٧ | ٣١ | ٨٥٨ | ٢٥٠٣ | ٨٤٦ | ٥٧ | ٥٩١ | ٧١ | ٤٦٨ |
| ٧٧ | ٩٦٩ | ٣٧ | ٩٨٠ | ٢١ | ٤٠١٥٧ | ٦١ | ٦٥٢ | ٩٩ | ٨٣٨ |
| ٨٣ | ٢٥١١٥ | ٤١ | ٣٣٠٦٢ | ٣١ | ٣٢٩ | ٧٩ | ٩٢٤ | ٣٣٠١ | ٨٦٥ |
| ٨٧ | ٢١٢ | ٤٣ | ١٠٢ | ٣٩ | ٤٦٦ | ٨٧ | ٤٦٠٤٥ | ٧ | ٩٤٣ |
| ٨٩ | ٢٦١ | ٥٣ | ٣٠٤ | ٤٣ | ٥٣٥ | ٩٧ | ١٩٥ | ١٣ | ٥٢٠٢٢ |
| ١٨٠١ | ٥٥١ | ٦١ | ٢٦٥ | ٤٩ | ٦٣٧ | ٢٩٠٣ | ٢٨٥ | ١٩ | ١٠١ |
| ١١ | ٧٩٢ | ٧٩ | ٨٢٦ | ٥١ | ٦٧١ | ٠٩ | ٣٧٤ | ٢٣ | ١٥٢ |

## بردن اون بیکه قدر اعداد اصلیه ولغارتمه‌لری

| عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٣٣٢٩ | ٥٢٢٢١ | ٣٦٩٧ | ٥٦٧٨٥ | ٤٠٩١ | ٦١١٨٣ | ٤٤٩٣ | ٦٥٢٥٤ | ٤٩١٩ | ٦٩١٨٨ |
| ٣١ | ٢٥٧ | ٣٧٠١ | ٨٣٢ | ٩٣ | ٢٠٤ | ٤٥٠٧ | ٣٨٩ | ٣١ | ٢٩٤ |
| ٤٣ | ٤١٤ | ٠٩ | ٩٢٦ | ٩٩ | ٢٦٨ | ١٣ | ٤٤٧ | ٣٣ | ٣١١ |
| ٤٧ | ٤٦٦ | ١٩ | ٥٧٠٤٣ | ٤١١١ | ٢٩٥ | ١٧ | ٤٨٥ | ٣٧ | ٣٤٦ |
| ٥٩ | ٦٢١ | ٢٧ | ١٣٦ | ٢٧ | ٥٦٣ | ١٩ | ٥٠٤ | ٤٣ | ٣٩٩ |
| ٦١ | ٦٤٧ | ٣٣ | ٢٠٦ | ٢٩ | ٥٨٤ | ٢٣ | ٥٤٣ | ٥١ | ٤٦٩ |
| ٧١ | ٧٧٦ | ٣٩ | ٢٧٦ | ٣٣ | ٦٢٧ | ٤٧ | ٧٧٢ | ٥٧ | ٥٢٢ |
| ٧٣ | ٨٠٢ | ٦١ | ٥٣٠ | ٣٩ | ٦٩٠ | ٤٩ | ٧٩٢ | ٦٧ | ٦٠٩ |
| ٨٩ | ٥٣٠٠٧ | ٦٧ | ٦٠٠ | ٥٣ | ٨٣٦ | ٦١ | ٩٠٦ | ٦٩ | ٦٢٧ |
| ٩١ | ٠٣٣ | ٦٩ | ٦٢٣ | ٥٧ | ٨٧٨ | ٦٧ | ٩٦٣ | ٧٣ | ٦٦٢ |
| ٣٤٠٧ | ٢٣٧ | ٧٩ | ٧٣٨ | ٥٩ | ٨٩٩ | ٨٣ | ٦٦١١٥ | ٨٧ | ٧٨٤ |
| ١٣ | ٣١٤ | ٩٣ | ٨٩٨ | ٧٧ | ٦٢٠٨٦ | ٩١ | ١٩١ | ٩٣ | ٨٣٦ |
| ٢٣ | ٥٦٧ | ٩٧ | ٩٤٤ | ٤٢٠١ | ٣٣٥ | ٩٧ | ٢٤٧ | ٩٩ | ٨٨٨ |
| ٤٩ | ٧٦٩ | ٣٨٠٣ | ٥٨٠١٣ | ١١ | ٤٣٩ | ٤٦٠٣ | ٣٠٤ | ٥٠٠٣ | ٩٢٣ |
| ٥٧ | ٨٧٠ | ٢١ | ٢١٨ | ١٧ | ٥٠٠ | ٢١ | ٤٧٤ | ٠٩ | ٩٧٥ |
| ٦١ | ٩٢٠ | ٢٣ | ٢٤٠ | ١٩ | ٥٢١ | ٣٧ | ٦٢٤ | ١١ | ٩٩٢ |
| ٦٣ | ٩٤٥ | ٣٣ | ٣٥٤ | ٢٩ | ٦٢٤ | ٣٩ | ٦٤٢ | ٢١ | ٧٠٠٧٩ |
| ٦٧ | ٩٩٥ | ٤٧ | ٥١٢ | ٣١ | ٦٤٤ | ٤٣ | ٦٨٠ | ٢٣ | ٠٩٦ |
| ٦٩ | ٥٤٠٢٠ | ٥١ | ٥٥٧ | ٤١ | ٧٤٧ | ٤٩ | ٧٣٦ | ٣٩ | ٢٣٤ |
| ٩١ | ٢٩٥ | ٥٣ | ٥٨٠ | ٤٣ | ٧٦٧ | ٥١ | ٧٥٥ | ٥١ | ٢٣٨ |
| ٩٩ | ٣٩٤ | ٦٣ | ٦٩٢ | ٥٣ | ٨٧٠ | ٥٧ | ٨١١ | ٥٩ | ٤٠٦ |
| ٣٥١١ | ٥٤٣ | ٧٧ | ٨٥٠ | ٥٩ | ٩٣١ | ٦٣ | ٨٦٧ | ٧٧ | ٥٦١ |
| ١٧ | ٦١٧ | ٨١ | ٨٩٤ | ٦١ | ٩٥١ | ٧٣ | ٩٦٠ | ٨١ | ٥٩٥ |
| ٢٧ | ٧٤١ | ٨٩ | ٩٨٤ | ٧١ | ٦٣٠٥٣ | ٧٩ | ٦٧٠١٥ | ٨٧ | ٦٤٦ |
| ٢٩ | ٧٦٥ | ٣٩٠٧ | ٥٩١٨٤ | ٧٣ | ٠٧٣ | ٩١ | ١٢٧ | ٩٩ | ٧٤٩ |
| ٣٣ | ٨١٤ | ١١ | ٢٢٩ | ٨٣ | ١٧٥ | ٤٧٠٣ | ٢٣٧ | ٥١٠١ | ٧٦٦ |
| ٣٩ | ٨٨٨ | ١٧ | ٢٩٥ | ٨٩ | ٢٣٦ | ٢١ | ٤٠٣ | ٠٧ | ٨١٧ |
| ٤١ | ٩١٣ | ١٩ | ٣١٨ | ٩٧ | ٣١٧ | ٢٣ | ٤٢٢ | ١٣ | ٨٦٨ |
| ٤٧ | ٩٨٦ | ٢٣ | ٣٦٢ | ٤٢٢٧ | ٦١٩ | ٢٩ | ٤٧٧ | ١٩ | ٩١٩ |
| ٥٧ | ٥٥١٠٨ | ٢٩ | ٤٢٨ | ٣٧ | ٧١٩ | ٣٣ | ٥١٤ | ٤٧ | ٧١١٥٥ |
| ٥٩ | ١٣٣ | ٣١ | ٤٥٠ | ٣٩ | ٧٣٩ | ٥١ | ٦٧٩ | ٥٣ | ٢٠٦ |
| ٧١ | ٢٧٩ | ٤٣ | ٥٨٣ | ٤٩ | ٨٣٩ | ٥٩ | ٧٥٢ | ٦٧ | ٣٢٤ |
| ٨١ | ٤٠٠ | ٤٧ | ٦٢٧ | ٥٧ | ٩١٩ | ٨٣ | ٩٧٠ | ٧١ | ٣٥٧ |
| ٨٣ | ٤٢٥ | ٦٧ | ٨٤٦ | ٦٣ | ٩٧٩ | ٨٧ | ٦٨٠٠٦ | ٧٩ | ٤٢٥ |
| ٩٣ | ٥٤٦ | ٨٩ | ٦٠٠٨٦ | ٧٣ | ٦٤٠٧٨ | ٨٩ | ٠٢٤ | ٨٩ | ٥٠٨ |
| ٣٦٠٧ | ٧١٥ | ٤٠٠١ | ٢١٧ | ٩١ | ٢٥٦ | ٩٣ | ٠٦١ | ٩٧ | ٥٧٥ |
| ١٣ | ٧٨٧ | ٣ | ٢٣٩ | ٩٧ | ٣١٦ | ٩٩ | ١١٥ | ٥٢٠٩ | ٦٧٥ |
| ١٧ | ٨٢٥ | ٧ | ٢٨٢ | ٤٤٠٩ | ٤٢٤ | ٤٨٠١ | ١٣٣ | ٢٧ | ٨٢٥ |
| ٢٣ | ٩٠٧ | ١٣ | ٣٤٧ | ٢١ | ٥٥٢ | ١٣ | ٢٤٢ | ٣١ | ٨٥٨ |
| ٣١ | ٥٦٠٠٣ | ١٩ | ٤١٢ | ٢٣ | ٥٧٢ | ١٧ | ٢٧٨ | ٣٣ | ٨٧٥ |
| ٣٧ | ٠٧٤ | ٢١ | ٤٣٣ | ٤١ | ٧٤٨ | ٣١ | ٤٠٤ | ٣٧ | ٩٠٨ |
| ٤٣ | ١٤٦ | ٢٧ | ٤٩٨ | ٤٧ | ٨٠٧ | ٦١ | ٦٧٣ | ٦١ | ٧٢١٠٧ |
| ٥٩ | ٣٣٦ | ٤٩ | ٧٣٥ | ٥١ | ٨٤٦ | ٧١ | ٧٦٢ | ٧٣ | ٢٠٦ |
| ٧١ | ٤٧٨ | ٥١ | ٧٥٦ | ٥٧ | ٩٠٤ | ٧٧ | ٨١٥ | ٧٩ | ٢٥٥ |
| ٧٣ | ٥٠٢ | ٥٧ | ٨٢١ | ٦٣ | ٩٦٣ | ٨٩ | ٩٢٢ | ٨١ | ٢٧٢ |
| ٧٧ | ٥٤٩ | ٧٣ | ٩٩١ | ٨١ | ٦٥١٣٧ | ٤٩٠٣ | ٦٩٠٤٦ | ٩٧ | ٤٠٣ |
| ٩١ | ٧١٤ | ٧٩ | ٦١٠٥٥ | ٨٣ | ١٥٧ | ٠٩ | ٠٩٩ | ٥٣٠٣ | ٤٥٢ |

بردن اون بيكه قدر اعداد اصليه ولغارتمه‌لرى

| عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٥٣٠٩ | ٧٢٥٠١ | ٥٧٠١ | ٧٥٥٩٥ | ٦١٢١ | ٧٨٦٨٢ | ٦٥٤٧ | ٨١٦٠٤ | ٦٩٤٩ | ٨٤١٩٢ |
| ٢٣ | ٦١٦ | ١١ | ٦٧١ | ٣١ | ٧٥٣ | ٥١ | ٦٣١ | ٥٩ | ٢٥٥ |
| ٣٣ | ٦٩٧ | ١٧ | ٧١٧ | ٣٣ | ٧٦٧ | ٥٣ | ٦٤٤ | ٦١ | ٢٦٧ |
| ٤٧ | ٨١١ | ٣٧ | ٨٦٨ | ٤٣ | ٨٣٨ | ٦٣ | ٧١٠ | ٦٧ | ٣٠٥ |
| ٥١ | ٨٤٣ | ٤١ | ٨٩٩ | ٥١ | ٨٩٥ | ٦٩ | ٧٥٠ | ٧١ | ٣٣٠ |
| ٨١ | ٧٣٠٨٦ | ٤٣ | ٩١٤ | ٦٣ | ٩٧٩ | ٧١ | ٧٦٣ | ٧٧ | ٣٦٧ |
| ٨٧ | ١٣٥ | ٤٩ | ٩٥٩ | ٧٣ | ٧٩٠٥٠ | ٧٧ | ٨٠٣ | ٨٣ | ٤٠٤ |
| ٩٣ | ١٨٣ | ٧٩ | ٧٦١٨٥ | ٩٧ | ٢١٨ | ٨١ | ٨٢٩ | ٩١ | ٤٥٤ |
| ٩٩ | ٢٣١ | ٨٣ | ٢١٥ | ٩٩ | ٢٣٢ | ٩٩ | ٩٤٨ | ٩٧ | ٤٩١ |
| ٥٤٠٧ | ٢٩٦ | ٩١ | ٢٧٥ | ٦٢٠٣ | ٢٦٠ | ٦٦٠٧ | ٨٢٠٠٠ | ٧٠٠١ | ٥١٦ |
| ١٣ | ٣٤٤ | ٥٨٠١ | ٣٥٠ | ١١ | ٣١٦ | ١٩ | ٠٧٩ | ١٣ | ٥٩٠ |
| ١٧ | ٣٧٦ | ٠٧ | ٣٩٥ | ١٧ | ٣٥٨ | ٢٧ | ١٩٧ | ١٩ | ٦٢٨ |
| ١٩ | ٣٩٢ | ١٣ | ٤٤٠ | ٢١ | ٣٨٦ | ٥٣ | ٣٠٢ | ٢٧ | ٦٧٧ |
| ٣١ | ٤٨٨ | ٢١ | ٥٠٠ | ٢٩ | ٤٤٢ | ٥٩ | ٣٤١ | ٣٩ | ٧٥١ |
| ٣٧ | ٥٢٦ | ٢٧ | ٥٤٥ | ٤٧ | ٥٦٧ | ٦١ | ٣٥٤ | ٤٣ | ٧٧٦ |
| ٤١ | ٥٦٨ | ٣٩ | ٦٣٤ | ٥٧ | ٦٣٧ | ٧٣ | ٤٣٣ | ٥٧ | ٨٦٢ |
| ٤٣ | ٥٨٤ | ٤٣ | ٦٦٤ | ٦٣ | ٦٧٨ | ٧٩ | ٤٧١ | ٦٩ | ٩٣٦ |
| ٤٩ | ٦٣٢ | ٤٩ | ٧٠٨ | ٦٩ | ٧٢٠ | ٨٩ | ٥٣٦ | ٧٩ | ٩٩٧ |
| ٧١ | ٨٠٧ | ٥١ | ٧٢٣ | ٧١ | ٧٣٤ | ٩١ | ٥٤٩ | ٧١٠٣ | ٨٥١٤٤ |
| ٧٧ | ٨٥٤ | ٥٧ | ٧٦٨ | ٧٧ | ٧٧٥ | ٦٧٠١ | ٦١٤ | ٠٩ | ١٨١ |
| ٧٩ | ٨٧٠ | ٦١ | ٧٩٧ | ٨٧ | ٨٤٤ | ٠٣ | ٦٢٧ | ٢١ | ٢٥٤ |
| ٨٣ | ٩٠٢ | ٦٧ | ٨٤٢ | ٩٩ | ٩٢٧ | ٠٩ | ٦٦٦ | ٢٧ | ٢٩١ |
| ٥٥٠١ | ٧٤٠٤٤ | ٦٩ | ٨٥٦ | ٦٣٠١ | ٩٤١ | ١٩ | ٧٣٠ | ٢٩ | ٣٠٣ |
| ٠٣ | ٠٦٠ | ٧٩ | ٩٣٠ | ١١ | ٨٠٠١٠ | ٣٣ | ٨٢١ | ٥١ | ٤٣٧ |
| ٠٧ | ٠٩٢ | ٨١ | ٩٤٥ | ١٧ | ٠٥١ | ٣٧ | ٨٤٧ | ٥٩ | ٥٨٥ |
| ١٩ | ١٨٦ | ٩٧ | ٧٧٠٦٣ | ٢٣ | ٠٩٢ | ٦١ | ٨٣٠٠١ | ٧٧ | ٥٩٤ |
| ٢١ | ٢٠٢ | ٥٩٠٣ | ١٠٧ | ٢٩ | ١٣٤ | ٦٣ | ٠١٤ | ٨٧ | ٦٥٥ |
| ٢٧ | ٢٤٩ | ٢٣ | ٢٥٤ | ٣٧ | ١٨٨ | ٧٩ | ١١٧ | ٩٣ | ٦٩١ |
| ٣١ | ٢٨٠ | ٢٧ | ٢٨٣ | ٤٣ | ٢٢٩ | ٨١ | ١٢٩ | ٧٢٠٧ | ٧٧٥ |
| ٥٧ | ٤٨٤ | ٣٩ | ٣٧١ | ٥٣ | ٢٩٨ | ٩١ | ١٩٣ | ١١ | ٨٠٠ |
| ٦٣ | ٥٣١ | ٥٣ | ٤٧٤ | ٥٩ | ٣٣٩ | ٩٣ | ٢٠٦ | ١٣ | ٨١٢ |
| ٦٩ | ٥٧٨ | ٨١ | ٦٧٧ | ٦١ | ٣٥٣ | ٦٨٠٣ | ٢٧٠ | ١٩ | ٨٤٨ |
| ٧٣ | ٦٠٩ | ٨٧ | ٧٢١ | ٦٧ | ٣٩٣ | ٢٣ | ٣٩٨ | ٢٩ | ٩٠٨ |
| ٨١ | ٦٧١ | ٦٠٠٧ | ٨٦٦ | ٧٣ | ٤٣٤ | ٢٧ | ٤٢٣ | ٣٧ | ٩٥٦ |
| ٩١ | ٧٤٩ | ١١ | ٨٩٥ | ٧٩ | ٤٧٥ | ٢٩ | ٤٣٦ | ٤٣ | ٩٩٢ |
| ٥٦٢٣ | ٩٩٧ | ٢٩ | ٧٨٠٢٥ | ٨٩ | ٥٤٣ | ٣٣ | ٤٦١ | ٤٧ | ٨٦٠١٦ |
| ٣٩ | ٧٥١٢٠ | ٣٨ | ٠٨٢ | ٩٧ | ٥٩٨ | ٤١ | ٥١٢ | ٥٣ | ٠٥٢ |
| ٤١ | ١٣٦ | ٤٣ | ١٢٥ | ٦٤٢١ | ٧٦٠ | ٥٧ | ٦١٣ | ٨٣ | ٢٣١ |
| ٤٧ | ١٨٢ | ٤٧ | ١٥٤ | ٢٧ | ٨٠١ | ٦٣ | ٦٥١ | ٩٧ | ٣١٤ |
| ٥١ | ٢١٣ | ٥٣ | ١٩٧ | ٤٩ | ٩٤٩ | ٦٩ | ٦٨٩ | ٧٣٠٧ | ٣٧٤ |
| ٥٣ | ٢٢٨ | ٦٧ | ٢٩٧ | ٥١ | ٩٦٣ | ٧١ | ٧٠٢ | ٠٩ | ٣٨٦ |
| ٥٧ | ٢٥٩ | ٧٣ | ٣٤٠ | ٦٩ | ٨١٠٨٤ | ٨٣ | ٧٧٨ | ٢١ | ٤٥٧ |
| ٥٩ | ٢٨٤ | ٧٩ | ٣٨٣ | ٧٣ | ١١١ | ٩٩ | ٨٧٩ | ٣١ | ٥١٦ |
| ٦٩ | ٣٥١ | ٨٩ | ٤٥٥ | ٨١ | ١٦٤ | ٦٩٠٧ | ٩٢٩ | ٣٣ | ٥٢٨ |
| ٨٣ | ٤٥٨ | ٩١ | ٤٦٩ | ٩١ | ٢٢١ | ١١ | ٩٥٤ | ٤٩ | ٦٢٣ |
| ٨٩ | ٥٠٤ | ٦١٠١ | ٥٤٠ | ٦٥٢١ | ٤٣١ | ١٧ | ٩٩٢ | ٥١ | ٦٣٦ |
| ٩٣ | ٥٣٤ | ١٣ | ٦٢٥ | ٢٩ | ٤٨٥ | ٤٧ | ٨٤١٨٠ | ٦٩ | ٧٤١ |

## بردن اون بیكه‌قدر اعداد اصلیه ولغارتمه‌لری

| عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٧٣٩٣ | ٨٦٨٨٢ | ٧٧٨٩ | ٨٩١٤٨ | ٨٢٢٣ | ٩١٥٥٦ | ٨٦٧٧ | ٩٣٨٣٧ | ٩٠٦٧ | ٩٥٧٤٦ |
| ٧٤١١ | ٩٨٨ | ٩٣ | ١٧٠ | ٣٧ | ٥٧٧ | ٨١ | ٨٥٧ | ٩١ | ٨٦١ |
| ١٧ | ٨٧٠٢٣ | ٧٨١٧ | ٣٠٤ | ٤٣ | ٦٠٩ | ٨٩ | ٨٩٧ | ٩١٠٣ | ٩١٨ |
| ٣٣ | ١١٦ | ٢٣ | ٣٣٧ | ٦٣ | ٧١٤ | ٩٣ | ٩١٧ | ٠٩ | ٩٤٧ |
| ٥١ | ٢٢١ | ٢٩ | ٣٧١ | ٦٩ | ٧٤٥ | ٩٩ | ٩٤٧ | ٢٧ | ٩٦٠٣٣ |
| ٥٧ | ٢٥٦ | ٤١ | ٤٣٧ | ٧٣ | ٧٦٦ | ٨٧٠٧ | ٩٨٧ | ٣٣ | ٠٦١ |
| ٥٩ | ٢٦٨ | ٥٣ | ٥٠٤ | ٨٧ | ٨٤٠ | ١٣ | ٩٤٠١٧ | ٣٧ | ٠٨٠ |
| ٧٧ | ٣٧٣ | ٦٧ | ٥٨١ | ٩١ | ٨٦١ | ١٩ | ٠٤٧ | ٥١ | ١٤٧ |
| ٨١ | ٣٩٦ | ٧٣ | ٦١٤ | ٩٣ | ٨٧١ | ٣١ | ١٠٦ | ٥٧ | ١٧٥ |
| ٨٧ | ٤٣١ | ٧٧ | ٦٣٦ | ٩٧ | ٨٩٢ | ٣٧ | ١٣٦ | ٦١ | ١٩٤ |
| ٨٩ | ٤٤٢ | ٧٩ | ٦٤٧ | ٨٣١١ | ٩٦٥ | ٤١ | ١٥٦ | ٧٣ | ٢٥١ |
| ٩٩ | ٥٠٠ | ٨٣ | ٦٦٩ | ١٧ | ٩٩٧ | ٤٧ | ١٨٦ | ٨١ | ٢٨٩ |
| ٧٥٠٧ | ٥٤٧ | ٧٩٠١ | ٧٦٨ | ٢٩ | ٩٢٠٥٩ | ٥٣ | ٢١٦ | ٨٧ | ٣١٧ |
| ١٧ | ٦٠٤ | ٠٧ | ٨٠١ | ٥٣ | ١٨٤ | ٦١ | ٢٥٥ | ٩٩ | ٣٧٤ |
| ٢٣ | ٦٣٩ | ١٩ | ٨٦٧ | ٦٣ | ٢٣٦ | ٧٩ | ٣٤٥ | ٩٢٠٣ | ٣٩٣ |
| ٢٩ | ٦٧٤ | ٢٧ | ٩١١ | ٦٩ | ٢٦٧ | ٨٣ | ٣٦٤ | ٠٩ | ٤٢١ |
| ٣٧ | ٧٢٠ | ٣٣ | ٩٤٤ | ٧٧ | ٣٠٩ | ٨٨٠٣ | ٤٦٣ | ٢١ | ٤٧٨ |
| ٤١ | ٧٤٣ | ٣٧ | ٩٦٦ | ٨٧ | ٣٦١ | ٠٧ | ٤٨٣ | ٢٧ | ٥٠٦ |
| ٤٧ | ٧٧٧ | ٤٩ | ٩٠٠٣١ | ٨٩ | ٣٧١ | ١٩ | ٥٤٢ | ٣٩ | ٥٦٢ |
| ٤٩ | ٧٨٩ | ٥١ | ٠٤٢ | ٨٤١٩ | ٥٢٦ | ٢١ | ٥٥٢ | ٤١ | ٥٧٢ |
| ٥٩ | ٨٤٦ | ٦٣ | ١٠٨ | ٢٣ | ٥٤٧ | ٣١ | ٦٠١ | ٥٧ | ٦٤٧ |
| ٦١ | ٨٥٨ | ٩٣ | ٢٧١ | ٢٩ | ٥٧٨ | ٣٧ | ٦٣٠ | ٧٧ | ٧٤١ |
| ٧٣ | ٩٢٧ | ٨٠٠٩ | ٣٥٨ | ٣١ | ٥٨٨ | ٣٩ | ٦٤٠ | ٨١ | ٧٥٩ |
| ٧٧ | ٩٥٠ | ١١ | ٣٦٩ | ٤٣ | ٦٥٠ | ٤٩ | ٦٨٩ | ٨٣ | ٧٦٩ |
| ٨٣ | ٩٨٤ | ١٧ | ٤٠١ | ٤٧ | ٦٧٠ | ٦١ | ٧٤٨ | ٩٣ | ٨١٦ |
| ٨٩ | ٨٨٠١٨ | ٣٩ | ٥٢٠ | ٦١ | ٧٤٢ | ٦٣ | ٧٥٨ | ٩٣١١ | ٩٠٠ |
| ٩١ | ٠٣٠ | ٥٣ | ٥٩٦ | ٦٧ | ٧٧٣ | ٦٧ | ٧٧٨ | ١٩ | ٩٣٧ |
| ٧٦٠٣ | ٠٩٨ | ٥٩ | ٦٢٨ | ٨٥٠١ | ٩٤٧ | ٨٧ | ٨٧٦ | ٢٣ | ٩٥٦ |
| ٠٧ | ١٢١ | ٦٩ | ٦٨٢ | ١٣ | ٩٣٠٠٨ | ٩٣ | ٩٠٥ | ٣٧ | ٩٧٠٢١ |
| ٣١ | ٢٠١ | ٨١ | ٧٤٧ | ٢١ | ٠٤٩ | ٨٩٢٣ | ٩٥٠٥١ | ٤١ | ٠٣٩ |
| ٣٩ | ٣٠٤ | ٨٧ | ٧٧٩ | ٢٧ | ٠٨٠ | ٢٩ | ٠٨٠ | ٤٣ | ٠٤٩ |
| ٤٣ | ٣٢٦ | ٨٩ | ٧٨٩ | ٣٧ | ١٣١ | ٣٣ | ١٠٠ | ٤٩ | ٠٧٧ |
| ٤٩ | ٣٦٠ | ٩٣ | ٨١١ | ٣٩ | ١٤١ | ٤١ | ١٣٩ | ٧١ | ١٧٩ |
| ٦٩ | ٤٧٤ | ٨١٠١ | ٨٥٤ | ٤٣ | ١٦١ | ٥١ | ١٨٧ | ٧٧ | ٢٠٦ |
| ٧٣ | ٤٩٧ | ١١ | ٩٠٧ | ٦٣ | ٢٦٣ | ٦٣ | ٢٤٥ | ٩١ | ٢٧١ |
| ٨١ | ٥٤٢ | ١٧ | ٩٤٠ | ٧٣ | ٣١٣ | ٦٩ | ٢٧٤ | ٩٧ | ٢٩٩ |
| ٨٧ | ٥٧٦ | ٢٣ | ٩٧٣ | ٨١ | ٣٥٤ | ٧١ | ٢٨٤ | ٩٤٠٣ | ٣٢٧ |
| ٩١ | ٥٩٨ | ٤٧ | ٩١١٠٠ | ٩٧ | ٤٣٥ | ٩٩ | ٤١٩ | ١٣ | ٣٧٣ |
| ٩٩ | ٦٤٣ | ٦١ | ١٧٤ | ٩٩ | ٤٤٥ | ٩٠٠١ | ٤٢٩ | ١٩ | ٤٠٠ |
| ٧٧٠٣ | ٦٦٦ | ٦٧ | ٢٠٦ | ٨٦٠٩ | ٤٩٥ | ٠٧ | ٤٥٨ | ٢١ | ٤١٠ |
| ١٧ | ٧٤٥ | ٧١ | ٢٢٨ | ٢٣ | ٥٦٦ | ١١ | ٤٧٧ | ٣١ | ٤٥٦ |
| ٢٣ | ٧٧٩ | ٧٩ | ٢٧٠ | ٢٧ | ٥٨٦ | ١٣ | ٤٨٧ | ٣٣ | ٤٦٥ |
| ٢٧ | ٨٠١ | ٩١ | ٣٣٤ | ٢٩ | ٥٩٦ | ٢٩ | ٥٦٤ | ٣٧ | ٤٨٣ |
| ٤١ | ٨٨٠ | ٨٢٠٩ | ٤٢٩ | ٤١ | ٦٥٦ | ٤١ | ٦٢٢ | ٣٩ | ٤٩٣ |
| ٥٣ | ٩٤٧ | ١٩ | ٤٨٢ | ٤٧ | ٦٨٧ | ٤٣ | ٦٣١ | ٦١ | ٥٩٤ |
| ٥٧ | ٩٦٩ | ٢١ | ٤٩٢ | ٦٣ | ٧٦٧ | ٤٩ | ٦٦٠ | ٦٣ | ٦٠٣ |
| ٥٩ | ٩٨١ | ٣١ | ٥٤٥ | ٦٩ | ٧٩٧ | ٥٩ | ٧٠٨ | ٦٧ | ٦٢١ |

## بردن اون بيكه قدر اعداد اصليه ولغارتمه‌لری

| عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه | عدد | لغارتمه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٩٤٧٣ | ٩٧٦٤٩ | ٩٦١٣ | ٩٨٢٨٦ | ٩٧١٩ | ٩٨٧٦٢ | ٩٨١١ | ٩٩١٧١ | ٩٩٠٧ | ٩٩٥٩٤ |
| ٧٩ | ٦٧٦ | ١٩ | ٣١٣ | ٢١ | ٧٧١ | ١٧ | ١٩٨ | ٢٣ | ٦٦٤ |
| ٩١ | ٧٣١ | ٢٣ | ٣٣١ | ٣٣ | ٨٢٥ | ٢٩ | ٢٥١ | ٢٩ | ٦٩١ |
| ٩٧ | ٧٥٩ | ٢٩ | ٣٥٨ | ٣٩ | ٨٥١ | ٣٣ | ٢٦٩ | ٣١ | ٦٩٩ |
| ٩٥١١ | ٨٢٣ | ٣١ | ٣٦٧ | ٤٣ | ٨٦٩ | ٣٩ | ٢٩٥ | ٤١ | ٧٤٣ |
| ٢١ | ٨٦٨ | ٤٣ | ٤٢١ | ٤٩ | ٨٩٦ | ٥١ | ٣٤٨ | ٤٩ | ٧٧٨ |
| ٣٣ | ٩٢٣ | ٤٩ | ٤٤٨ | ٦٧ | ٩٧٦ | ٥٧ | ٣٧٤ | ٦٧ | ٨٥٦ |
| ٣٩ | ٩٥٠ | ٦١ | ٥٠٢ | ٦٩ | ٩٨٥ | ٥٩ | ٣٨٣ | ٧٣ | ٨٨٣ |
| ٤٧ | ٩٨٧ | ٧٧ | ٥٧٤ | ٨١ | ٩٩٠٣٨ | ٧١ | ٤٣٦ | | |
| ٥١ | ٩٨٠٠٥ | ٧٩ | ٥٨٣ | ٨٧ | ٠٦٥ | ٨٣ | ٤٨٩ | | |
| ٨٧ | ١٦٨ | ٨٩ | ٦٢٨ | ٩١ | ٠٨٣ | ٨٧ | ٥٠٦ | | |
| ٩٦٠١ | ٢٣٢ | ٩٧ | ٦٦٤ | ٩٨٠٣ | ١٣٦ | ٩٩٠١ | ٥٦٨ | | |

## ١٨٥١ تاریخنده تعيين اولنان شمسك ميللرينك جدوليدر

| | ميل شمس | | | | ميل شمس | | | | ميل شمس | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ″ | ′ | ° | | ″ | ′ | | | ″ | ′ | |
| ٩ مارت | +٥٨ | ٦ | ٠ | ٩ تموز | +١٦ | ٢٢ | ٢٠ | ٩ تشرين ثانى | —٩ | ٥١ | ٢٠ |
| ٩ نيسان | +٥٢ | ٤٤ | ١١ | ٩ آغستوس | +١٣ | ٥٥ | ١١ | ٩ كانون اول | —١٦ | ٢٧ | ٢٣ |
| ٩ مايس | +١١ | ٠٨ | ٢٠ | ٩ ايلول | +٠٢ | ٠٤ | ٠٠ | ٩ كانون ثانى | —٠٣ | ٥٨ | ١٩ |
| ٩ حزيران | +٢٤ | ٢٧ | ٢٣ | ٩ تشرين اول | —٥٠ | ١٧ | ١١ | ٩ شباط | —٣٣ | ٣٩ | ١٠ |

تنبيه —— اعداد اصليه جدولی واسطه‌سيله ويريلان برعددك لغارتمه‌سنی تعيين ايتمك ايچون اكر عدد مذكور اصلی دكل ايسه اختصار طريقيله اعداد اصليه‌لره بعد التفريق لغارتمه‌لری آلنه‌رق جمع اولنوب حاصل اولان مجموع ويريلان عددك لغارتمه‌سی اولور.

اكر عدد ٨٩٦٧٩٣١ مثللو برعدد اولور ايسه صولدن درتخانه افراز اولنه‌رق حاصل اولان ٨٩٦٧ عددی عدد اصلی دكل ايسه ٣×٢٩٨٩ مضروبلرينه تفريق اولنديغندن بو عددلرك ٠,٤٧٧١٢ و ٠,٤٧٥٥٣ لغارتمه‌لری جمع اولنه‌رق ٠,٩٥٢٦٥ يالكز عدد كسری النوب ٨٩٦٧ عددينك لغارتمه‌سی اولمش اولور.

بعده اشبوعدد جدولده ٨٩٦٣ ايله ٨٩٦٩ عددلری بيننده بولنديغندن مذكور ايكی عدد بيننده‌كی ٦ فضلنك اول عددلرك لغارتمه‌لری بيننده‌كی ٠,٠٠٠٢٩ فضلنه نسبتی ويريلان عددك افرازدن صكره اولان ٠,٩٣١ عددينك (س) نه نسبتی

يعنی ٦ : ٠,٠٠٠٢٩ = ٠,٩٣١ : س، س = ٠,٠٠٠٠٤٥ قدر اولوب اشبو مقدار اولجه تعيين اولنان ٨٩٦٧ عددينك شو ٠,٩٥٢٦٥ لغارتمه‌سنه ضم اولندقده ٨٩٦٧٩٣١ عددينك لغارتمه‌سی ٦,٩٥٢٦٩٥ عددی اولمش اولور وياخود طوغريدن طوغری‌يه آرالرنده بولنديغی ايكی عدد بيننده‌كی ٦ عددك اول عددك لغارتمه‌لری بيننده‌كی ٠,٠٠٠٢٩ فضلنه نسبتی ويريلان عددك برنجی عدددن ٤,٩٣١ زياده‌لكنك (س) نه نسبتی يعنی

٦ : ٠,٠٠٠٢٩ = ٤,٩٣١ : س، س = ٠,٠٠٠٢٣٨ ياخود ٠,٠٠٠٢٤ مقداری ٩٨٦٣ عددينك لغارتمه‌سی اولان ٠,٩٥٢٤٥ عددينه ضم اولندقده حاصل اولان ٦,٩٥٢٦٩ عددی ٨٩٦٧٩٣١ عددينك لغارتمه‌سی اولمش اولور. اكر لغارتمه ويريلور ايسه عين طوزده وفقط عكسی عمله اجرا اولنه‌رق مطلوب عدد تعيين اولنور.

بسيط اجراآتده عمليات اجراسی ممكن ايسه‌ده حسابات دقيقه‌ده مرعی الاجرا اوله‌من.

برنجی اصول ايكنجی اصوله نسبتله دها صحيحه قريب اولديغندن ايكنجی اصولدن صرفنظر ايدلمليدر.

## اون دقیقه‌دن اون دقیقه‌یه آرتان قوسلرك انسابنك لغارتمه‌لری

| درجه | دقیقه | حب | تف | مماس | تف | عام م | حت | تف | دقیقه | درجه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٠٠ | ٠٠ | ∞— | ١٠٠٠٠٠ | ∞— | ١٠٠٠٠٠ | ∞+ | ٠٠٠٠ | ٠٠ | ٠٠ | ٩٠ |
| | ١٠ | ٣,٤٦٣٧٣ | ٣٠١٠٢ | ٣,٤٦٣٧٣ | ٣٠١٠٣ | ٢,٥٣٦٢٧ | ١,٩٩٩٩٩ | ٠١ | ٥٠ | |
| | ٢٠ | ٧٦٤٧٥ | ١٧٦٠٩ | ٧٦٤٧٦ | ١٧٦١٠ | ٢٣٥٢٤ | ٩٩٩٨ | ٠١ | ٤٠ | |
| | ٣٠ | ٩٤٠٨٤ | ١٢٤٩٤ | ٩٤٠٨٦ | ١٢٤٩٥ | ٠٥٩١٤ | ٩٩٩٧ | ٠١ | ٣٠ | |
| | ٤٠ | ٢,٠٦٥٧٨ | ٩٦٩٠ | ٢,٠٦٥٨١ | ٩٦٩٢ | ١,٩٣٤١٩ | ٩٩٩٥ | ٠٢ | ٢٠ | |
| | ٥٠ | ١٦٢٦٨ | ٧٩١٨ | ١٦٢٧٣ | ٧٩١٩ | ٨٣٧٢٧ | ٩٩٩٣ | ٠٢ | ١٠ | |
| ٠١ | ٠٠ | ٢٤١٨٦ | ٦٦٩٣ | ٢٤١٩٢ | ٦٦٩٦ | ٧٥٨٠٨ | ٩٩٩١ | ٠٢ | ٠٠ | ٨٩ |
| | ١٠ | ٣٠٨٧٩ | ٥٧٩٩ | ٣٠٨٨٨ | ٥٨٠١ | ٦٩١١٢ | ٩٩٨٨ | ٠٣ | ٥٠ | |
| | ٢٠ | ٣٦٦٧٨ | ٥١١٤ | ٣٦٦٨٩ | ٥١١٨ | ٦٣٣١١ | ٩٩٨٥ | ٠٣ | ٤٠ | |
| | ٣٠ | ٤١٧٩٢ | ٤٥٧٤ | ٤١٨٠٧ | ٤٥٧٨ | ٥٨١٩٣ | ٩٩٨٢ | ٠٣ | ٣٠ | |
| | ٤٠ | ٤٦٣٦٦ | ٤١٣٨ | ٤٦٣٨٥ | ٤١٤٢ | ٥٣٦١٥ | ٩٩٧٨ | ٠٤ | ٢٠ | |
| | ٥٠ | ٥٠٥٠٤ | ٣٧٧٨ | ٥٠٥٢٧ | ٣٧٨١ | ٤٩٤٧٣ | ٩٩٧٤ | ٠٤ | ١٠ | |
| ٠٢ | ٠٠ | ٥٤٢٨٢ | ٣٤٧٥ | ٥٤٣٠٨ | ٣٤٨٠ | ٤٥٦٩٢ | ٩٩٦٩ | ٠٥ | ٠٠ | ٨٨ |
| | ١٠ | ٥٧٧٥٧ | ٣٢١٦ | ٥٧٧٨٨ | ٣٢٢١ | ٤٢٢١٢ | ٩٩٦٤ | ٠٥ | ٥٠ | |
| | ٢٠ | ٦٠٩٧٣ | ٢٩٨٥ | ٦١٠٠٩ | ٣٠٠٠ | ٣٨٩٩١ | ٩٩٥٩ | ٠٥ | ٤٠ | |
| | ٣٠ | ٦٣٩٦٨ | ٢٨٠١ | ٦٤٠٠٩ | ٢٨٠٧ | ٣٥٩٩١ | ٩٩٥٣ | ٠٦ | ٣٠ | |
| | ٤٠ | ٦٦٧٦٩ | ٢٦٣١ | ٦٦٨١٦ | ٢٦٣٧ | ٣٣١٨٤ | ٩٩٤٧ | ٠٦ | ٢٠ | |
| | ٥٠ | ٦٩٤٠٠ | ٢٤١٠ | ٦٩٤٥٣ | ٢٤٨٧ | ٣٠٥٤٧ | ٩٩٤٠ | ٠٧ | ١٠ | |
| ٠٣ | ٠٠ | ٧١٨٨٠ | ٢٣٤٦ | ٧١٩٤٠ | ٢٣٥٢ | ٢٨٠٦٠ | ٩٩٣٤ | ٠٦ | ٠٠ | ٨٧ |
| | ١٠ | ٧٤٢٢٦ | ٢٢٢٥ | ٧٤٢٩٢ | ٢٢٣٣ | ٢٥٧٠٨ | ٩٩٢٦ | ٠٨ | ٥٠ | |
| | ٢٠ | ٧٦٤٥١ | ٢١١٧ | ٧٦٥٢٥ | ٢١٢٤ | ٢٣٤٧٥ | ٩٩١٩ | ٠٧ | ٤٠ | |
| | ٣٠ | ٧٨٥٦٨ | ٢٠١٧ | ٧٨٦٤٩ | ٢٠٢٥ | ٢١٣٥١ | ٩٩١١ | ٠٨ | ٣٠ | |
| | ٤٠ | ٨٠٥٨٥ | ١٩٢٨ | ٨٠٦٧٤ | ١٩٣٦ | ١٩٣٢٦ | ٩٩٠٣ | ٠٨ | ٢٠ | |
| | ٥٠ | ٨٢٥١٣ | ١٨٤٥ | ٢٦١٠ | ١٨٥٤ | ١٧٣٩٠ | ٩٨٩٤ | ٠٩ | ١٠ | |
| ٠٤ | ٠٠ | ٨٤٣٥٨ | ١٧٧٠ | ٤٤٦٤ | ١٧٧٩ | ١٥٥٣٦ | ٩٨٨٥ | ٠٩ | ٠٠ | ٨٦ |
| | ١٠ | ٨٦١٢٨ | ١٧٠١ | ٦٢٤٣ | ١٧١٠ | ١٣٧٥٧ | ٩٨٧٦ | ٠٩ | ٥٠ | |
| | ٢٠ | ٨٧٨٢٩ | ١٦٣٥ | ٧٩٥٣ | ١٦٤٥ | ١٢٠٤٧ | ٩٨٦٦ | ١٠ | ٤٠ | |
| | ٣٠ | ٨٩٤٦٤ | ١٥٧٦ | ٩٥٩٨ | ١٥٨٧ | ١٠٤٠٢ | ٩٨٥٦ | ١٠ | ٣٠ | |
| | ٤٠ | ٩١٠٤٠ | ١٥٢١ | ٩١١٨٥ | ١٥٣١ | ٠٨٨١٥ | ٩٨٤٥ | ١١ | ٢٠ | |
| | ٥٠ | ٢٥٦١ | ١٤٦٩ | ٢٧١٦ | ١٤٧٩ | ٧٢٨٤ | ٩٨٣٤ | ١١ | ١٠ | |
| ٠٥ | ٠٠ | ٤٠٣٠ | ١٤٣٠ | ٤١٩٥ | ١٤٣٢ | ٥٨٠٥ | ٩٨٢٣ | ١١ | ٠٠ | ٨٥ |
| | ١٠ | ٥٤٥٠ | ١٣٦٥ | ٥٦٢٧ | ١٣٨٦ | ٤٣٧٣ | ٩٨١٢ | ١١ | ٥٠ | |
| | ٢٠ | ٦٨٢٥ | ١٣٣٢ | ٧٠١٣ | ١٣٤٥ | ٢٩٨٧ | ٩٨٠٠ | ١٢ | ٤٠ | |
| | ٣٠ | ٨١٥٧ | ١٢٩٣ | ٨٣٥٨ | ١٣٠٤ | ١٦٤٢ | ٩٧٨٧ | ١٣ | ٣٠ | |
| | ٤٠ | ٩٤٥٠ | ١٢٥٤ | ٩٦٦٢ | ١٢٦٨ | ٠٣٣٨ | ٩٧٧٥ | ١٢ | ٢٠ | |
| | ٥٠ | ١,٠٠٧٠٤ | ١٢١٩ | ١,٠٠٩٣٠ | ١٢٣٢ | ٠,٩٩٠٧٠ | ٩٧٦١ | ١٤ | ١٠ | |
| ٠٦ | ٠٠ | ١٩٢٣ | ١١٨٦ | ٢١٦٢ | ١١٩٩ | ٩٧٨٣٨ | ٩٧٤٨ | ١٣ | ٠٠ | ٨٤ |
| | ١٠ | ٣١٠٩ | ١١٥٣ | ٣٣٦١ | ١١٦٧ | ٦٦٣٩ | ٩٧٣٤ | ١٤ | ٥٠ | |
| | ٢٠ | ٤٢٦٢ | ١١٢٤ | ٤٥٢٨ | ١١٣٨ | ٥٤٧٢ | ٩٧٢٠ | ١٤ | ٤٠ | |
| | ٣٠ | ٥٣٨٦ | ١٠٩٥ | ٥٦٦٦ | ١١٠٩ | ٤٣٣٤ | ٩٧٠٥ | ١٥ | ٣٠ | |
| | ٤٠ | ٦٤٨١ | ١٠٦٧ | ٦٧٧٥ | ١٠٨٣ | ٣٢٢٥ | ٩٦٩٠ | ١٥ | ٢٠ | |
| | ٥٠ | ٧٥٤٨ | ١٠٤١ | ٧٨٥٨ | ١٠٥٦ | ٢١٤٢ | ٩٦٧٥ | ١٥ | ١٠ | |
| ٠٧ | ٠٠ | ٨٥٨٩ | ١٠١٧ | ٨٩١٤ | ١٠٣٣ | ١٠٨٦ | ٩٦٥٩ | ١٦ | ٠٠ | ٨٣ |
| | ١٠ | ٩٦٠٦ | ٩٩٣ | ٩٩٤٧ | ١٠٠٩ | ٠٠٥٣ | ٩٦٤٣ | ١٦ | ٥٠ | |
| | ٢٠ | ١٠٥٩٩ | ٩٧١ | ١٠٩٥٦ | ٩٨٧ | ٨٩٠٤٤ | ١,٩٩٦٢٧ | ١٦ | ٤٠ | |
| ٠٧ | ٣٠ | ١,١١٥٧٠ | ٩٤٩ | ١,١١٩٤٣ | ٩٦٦ | ٠,٨٨٠٥٧ | | ١٧ | ٣٠ | ٨٢ |

## اون دقیقه‌دن اون دقیقه‌یه آرتان قوسلرك انسابنك لغارتمه‌لری

| درجه | دقیقه | تف | جب ̀ | تمام مم | تف | مماس | تف | جب | دقیقه | درجه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٨٢ | ٢٠ | | ١,٩٩٦١٠ | ٠,٨٧٠٩١ | | ١,١٢٩٠٩ | ٩٢٨ | ١,١٢٥١٩ | ٤٠ | ٠٧ |
| | ١٠ | ١٧ | ٩٥٩٣ | ٦١٤٦ | ٩٤٥ | ٣٨٥٤ | ٩٠٩ | ٣٤٤٧ | ٥٠ | |
| ٨٢ | ٠٠ | ١٨ | ٩٥٧٥ | ٥٢٢٠ | ٩٢٦ | ٤٧٨٠ | ٨٨٩ | ٤٣٥٦ | ٠٠ | ٠٨ |
| | ٥٠ | ١٨ | ٩٥٥٧ | ٤٣١٢ | ٩٠٨ | ٥٦٨٨ | ٨٧١ | ٥٢٤٥ | ١٠ | |
| | ٤٠ | ١٨ | ٩٥٣٩ | ٣٤٢٢ | ٨٨٩ | ٦٥٧٧ | ٨٥٤ | ٦١١٦ | ٢٠ | |
| | ٣٠ | ١٩ | ٩٥٢٠ | ٢٥٥٠ | ٨٧٣ | ٧٤٥٠ | ٨٣٧ | ٦٩٧٠ | ٣٠ | |
| | ٢٠ | ١٩ | ٩٥٠١ | ١٦٩٤ | ٨٥٦ | ٨٣٠٦ | ٨٢١ | ٧٨٠٧ | ٤٠ | |
| | ١٠ | ١٩ | ٩٤٨٢ | ٠٨٥٤ | ٨٤٠ | ٩١٤٦ | ٨٠٥ | ٨٦٢٨ | ٥٠ | |
| ٨١ | ٠٠ | ٢٠ | ٩٤٦٢ | ٠٠٢٩ | ٨٢٥ | ٩٩٧١ | ٧٩٠ | ٩٤٣٣ | ٠٠ | ٠٩ |
| | ٥٠ | ٢٠ | ٩٤٤٢ | ٧٩٢١٨ | ٨١١ | ٢٠٧٨٢ | ٧٧٦ | ٢٠٢٢٣ | ١٠ | |
| | ٤٠ | ٢١ | ٩٤٢١ | ٨٤٢٢ | ٧٩٦ | ١٥٧٨ | ٧٦٢ | ٠٩٩٩ | ٢٠ | |
| | ٣٠ | ٢١ | ٩٤٠٠ | ٧٦٣٩ | ٧٨٣ | ٢٣٦١ | ٧٤٨ | ١٧٦١ | ٣٠ | |
| | ٢٠ | ٢١ | ٩٣٧٩ | ٦٨٧٠ | ٧٦٩ | ٣١٣٠ | ٧٣٥ | ٢٥٠٩ | ٤٠ | |
| | ١٠ | ٢٢ | ٩٣٥٧ | ٦١١٣ | ٧٥٧ | ٣٨٨٧ | ٧٢٣ | ٣٢٤٤ | ٥٠ | |
| ٨٠ | ٠٠ | ٢٢ | ٩٣٣٥ | ٥٣٦٨ | ٧٤٥ | ٤٦٣٢ | ٧١٠ | ٣٩٦٧ | ٠٠ | ١٠ |
| | ٥٠ | ٢٢ | ٩٣١٣ | ٤٦٣٥ | ٧٣٣ | ٥٣٦٥ | ٦٩٩ | ٤٦٧٧ | ١٠ | |
| | ٤٠ | ٢٣ | ٩٢٩٠ | ٣٩١٤ | ٧٢١ | ٦٠٨٦ | ٦٨٧ | ٥٣٧٦ | ٢٠ | |
| | ٣٠ | ٢٣ | ٩٢٦٧ | ٣٢٠٣ | ٧١١ | ٦٧٩٧ | ٦٧٦ | ٦٠٦٣ | ٣٠ | |
| | ٢٠ | ٢٤ | ٩٢٤٣ | ٢٥٠٤ | ٦٩٩ | ٧٤٩٦ | ٦٦٦ | ٦٧٣٩ | ٤٠ | |
| | ١٠ | ٢٤ | ٩٢١٩ | ١٨١٤ | ٦٩٠ | ٨١٨٦ | ٦٥٥ | ٧٤٠٥ | ٥٠ | |
| ٧٩ | ٠٠ | ٢٤ | ٩١٩٥ | ١١٣٥ | ٦٧٩ | ٨٨٦٥ | ٦٤٥ | ٨٠٦٠ | ٠٠ | ١١ |
| | ٥٠ | ٢٥ | ٩١٧٠ | ٠٤٦٥ | ٦٧٠ | ٩٥٣٥ | ٦٣٥ | ٨٧٠٥ | ١٠ | |
| | ٤٠ | ٢٥ | ٩١٤٥ | ٦٩٨٠٥ | ٦٦٠ | ٣٠١٩٩ | ٦٢٦ | ٩٣٤٠ | ٢٠ | |
| | ٣٠ | ٢٦ | ٩١١٩ | ٩١٥٤ | ٦٥١ | ٠٨٤٦ | ٦١٦ | ٩٩٦٦ | ٣٠ | |
| | ٢٠ | ٢٦ | ٩٠٩٣ | ٨٥١١ | ٦٤٣ | ١٤٨٩ | ٦٠٧ | ٣٠٥٨٢ | ٤٠ | |
| | ١٠ | ٢٦ | ٩٠٦٧ | ٧٨٧٨ | ٦٣٣ | ٢١٢٢ | ٥٩٩ | ١١٨٩ | ٥٠ | |
| ٧٨ | ٠٠ | ٢٧ | ٩٠٤٠ | ٧٢٥٣ | ٦٢٥ | ٢٧٤٧ | ٥٩٠ | ١٧٨٨ | ٠٠ | ١٢ |
| | ٥٠ | ٢٧ | ٩٠١٣ | ٦٦٣٥ | ٦١٨ | ٣٣٦٥ | ٥٨٢ | ٢٣٧٨ | ١٠ | |
| | ٤٠ | ٢٧ | ٨٩٨٦ | ٦٠٢٦ | ٦٠٩ | ٣٩٧٤ | ٥٧٤ | ٢٩٦٠ | ٢٠ | |
| | ٣٠ | ٢٨ | ٨٩٥٨ | ٥٤٢٤ | ٦٠٢ | ٤٥٧٦ | ٥٦٦ | ٣٥٣٤ | ٣٠ | |
| | ٢٠ | ٢٨ | ٨٩٣٠ | ٤٨٣٠ | ٥٩٤ | ٥١٧٠ | ٥٥٨ | ٤١٠٠ | ٤٠ | |
| | ١٠ | ٢٩ | ٨٩٠١ | ٤٢٤٣ | ٥٨٧ | ٥٧٥٧ | ٥٥١ | ٤٦٥٨ | ٥٠ | |
| ٧٧ | ٠٠ | ٢٩ | ٨٨٧٢ | ٣٦٦٤ | ٥٧٩ | ٦٣٣٦ | ٥٤٣ | ٥٢٠٩ | ٠٠ | ١٣ |
| | ٥٠ | ٢٩ | ٨٨٤٣ | ٣٠٩١ | ٥٧٣ | ٦٩٠٩ | ٥٣٧ | ٥٧٥٢ | ١٠ | |
| | ٤٠ | ٣٠ | ٨٨١٣ | ٢٥٢٤ | ٥٦٧ | ٧٤٧٦ | ٥٣٠ | ٦٢٨٩ | ٢٠ | |
| | ٣٠ | ٣٠ | ٨٧٨٣ | ١٩٦٥ | ٥٥٩ | ٨٠٣٥ | ٥٢٢ | ٦٨١٩ | ٣٠ | |
| | ٢٠ | ٣٠ | ٨٧٥٣ | ١٤١١ | ٥٥٤ | ٨٥٨٩ | ٥١٧ | ٧٣٤١ | ٤٠ | |
| | ١٠ | ٣١ | ٨٧٢٢ | ٠٨٦٤ | ٥٤٧ | ٩١٣٦ | ٥١٠ | ٧٨٥٨ | ٥٠ | |
| ٧٦ | ٠٠ | ٣٢ | ٨٦٩٠ | ٠٣٢٣ | ٥٤١ | ٩٦٧٧ | ٥٠٣ | ٨٣٦٨ | ٠٠ | ١٤ |
| | ٥٠ | ٣١ | ٨٦٥٩ | ٥٩٧٨٨ | ٥٣٥ | ٤٠٢١٢ | ٤٩٨ | ٨٨٧١ | ١٠ | |
| | ٤٠ | ٣٢ | ٨٦٢٧ | ٩٢٥٨ | ٥٣٠ | ٠٧٤٢ | ٤٩١ | ٩٣٦٩ | ٢٠ | |
| | ٣٠ | ٣٣ | ٨٥٩٤ | ٨٧٣٤ | ٥٢٤ | ١٢٦٦ | ٤٨٦ | ٩٨٦٠ | ٣٠ | |
| | ٢٠ | ٣٣ | ٨٥٦١ | ٨٢١٦ | ٥١٨ | ١٧٨٤ | ٤٧٩ | ٤٠٣٤٦ | ٤٠ | |
| | ١٠ | ٣٣ | ٨٥٢٨ | ٧٧٠٣ | ٥١٣ | ٢٢٩٧ | ٤٧٥ | ٠٨٢٥ | ٥٠ | |
| ٧٥ | ٠٠ | ٣٤ ٣٤ | ١,٩٨٤٩٤ | ٠,٥٧١٩٥ | ٥٠٨ ٥٠٣ | ١,٤٢٨٠٥ | ٤٦٨ | ١,٤١٣٠٠ | ٠٠ | ١٥ |
| درجه | دقیقه | | جب | مماس | | تمام مم | | جب ̀ | دقیقه | درجه |

## اون دقیقه‌دن اون دقیقه‌یه آرتان قوسلرك انسابنك لغارتمه‌لری

| درجه | دقیقه | حب | تف | مماس | تف | تمام مم | تف | تحب | دقیقه | درجه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱٥ | ۱۰ | ۱,٤۱۷٦۸ | ٤٦٤ | ۱,٤۳۳۰۸ | ٤۹۸ | ۰,٥٦٦۹۲ | ۳٤ | ۱,۹۸٤٦۰ | ٥۰ | ۷٤ |
| | ۲۰ | ۲۲۳۲ | ٤٥۸ | ۳۸۰٦ | ٤۹۲ | ٦۱۹٤ | ۳٥ | ۸٤۲٦ | ٤۰ | |
| | ۳۰ | ۲٦۹۰ | ٤٥۳ | ٤۲۹۹ | ٤۸۸ | ٥۷۰۱ | ۳٥ | ۸۳۹۱ | ۳۰ | |
| | ٤۰ | ۳۱٤۳ | ٤٤۸ | ٤۷۸۷ | ٤۸٤ | ٥۲۱۳ | ۳٦ | ۸۳٥٦ | ۲۰ | |
| | ٥۰ | ۳٥۹۱ | ٤٤۳ | ٥۲۷۱ | ٤۷۹ | ٤۷۲۹ | ۳٦ | ۸۳۲۰ | ۱۰ | |
| ۱٦ | ۰۰ | ٤۰۳٤ | ٤۳۸ | ٥۷٥۰ | ٤۷٤ | ٤۲٥۰ | ۳٦ | ۸۲۸٤ | ۰۰ | ۷٤ |
| | ۱۰ | ٤٤۷۲ | ٤۳۳ | ٦۲۲٤ | ٤۷۰ | ۳۷۷٦ | ۳۷ | ۸۲٤۸ | ٥۰ | |
| | ۲۰ | ٤۹۰٥ | ٤۲۹ | ٦٦۹٤ | ٤٦٦ | ۳۳۰٦ | ۳۷ | ۸۲۱۱ | ٤۰ | |
| | ۳۰ | ٥۳۳٤ | ٤۲٤ | ۷۱٦۰ | ٤٦۲ | ۲۸٤۰ | ۳۸ | ۸۱۷٤ | ۳۰ | |
| | ٤۰ | ٥۷٥۸ | ٤۲۰ | ۷٦۲۲ | ٤٥۸ | ۲۳۸۷ | ۳۸ | ۸۱۳٦ | ۲۰ | |
| | ٥۰ | ٦۱۷۸ | ٤۱٦ | ۸۰۸۰ | ٤٥٤ | ۱۹۲۰ | ۳۸ | ۸۰۹۸ | ۱۰ | |
| ۱۷ | ۰۰ | ٦٥۹٤ | ٤۱۱ | ۸٥۳٤ | ٤٥۰ | ۱٤٦٦ | ۳۹ | ۸۰٦۰ | ۰۰ | ۷۳ |
| | ۱۰ | ۷۰۰٥ | ٤۰٦ | ۸۹۸٤ | ٤٤٦ | ۱۰۱٦ | ۳۹ | ۸۰۲۱ | ٥۰ | |
| | ۲۰ | ۷٤۱۱ | ٤۰۳ | ۹٤۳۰ | ٤٤۲ | ۰٥۷۰ | ٤۰ | ۷۹۸۲ | ٤۰ | |
| | ۳۰ | ۷۸۱٤ | ۳۹۹ | ۹۸۷۲ | ٤۳۹ | ۰۱۲۸ | ٤۰ | ۷۹٤۲ | ۳۰ | |
| | ٤۰ | ۸۲۱۳ | ۳۹٤ | ٥۰۳۱۱ | ٤۳٥ | ٤۹٦۸۹ | ٤۱ | ۷۹۰۲ | ۲۰ | |
| | ٥۰ | ۸٦۰۷ | ۳۹۱ | ۰۷٤٦ | ٤۳۲ | ۹۲٥٤ | ٤۰ | ۷۸٦۱ | ۱۰ | |
| ۱۸ | ۰۰ | ۸۹۹۸ | ۳۸۷ | ۱۱۷۸ | ٤۲۸ | ۸۸۲۲ | ٤۲ | ۷۸۲۱ | ۰۰ | ۷۲ |
| | ۱۰ | ۹۳۸٥ | ۳۸۳ | ۱٦۰٦ | ٤۲٥ | ۸۳۹٤ | ٤۱ | ۷۷۷۹ | ٥۰ | |
| | ۲۰ | ۹۷٦۸ | ۳۸۰ | ۲۰۳۱ | ٤۲۱ | ۷۹٦۹ | ٤۲ | ۷۷۳۸ | ٤۰ | |
| | ۳۰ | ٥۰۱٤۸ | ۳۷٥ | ۲٤٥۲ | ٤۱۸ | ۷٥٤۸ | ٤۳ | ۷٦۹٦ | ۳۰ | |
| | ٤۰ | ۰٥۲۳ | ۳۷۲ | ۲۸۷۰ | ٤۱٥ | ۷۱۳۰ | ٤۳ | ۷٦٥۳ | ۲۰ | |
| | ٥۰ | ۰۸۹٦ | ۳٦۸ | ۳۲۸٥ | ٤۱۲ | ٦۷۱٥ | ٤۳ | ۷٦۱۰ | ۱۰ | |
| ۱۹ | ۰۰ | ۱۲٦٤ | ۳٦٥ | ۳٦۹۷ | ٤۰۹ | ٦۳۰۳ | ٤٤ | ۷٥٦۷ | ۰۰ | ۷۱ |
| | ۱۰ | ۱٦۲۹ | ۳٦۲ | ٤۱۰٦ | ٤۰٦ | ٥۸۹٤ | ٤٤ | ۷٥۲۳ | ٥۰ | |
| | ۲۰ | ۱۹۹۱ | ۳٥۹ | ٤٥۱۲ | ٤۰۳ | ٥٤۸۸ | ٤٤ | ۷٤۷۹ | ٤۰ | |
| | ۳۰ | ۲۳٥۰ | ۳٥٥ | ٤۹۱٥ | ٤۰۰ | ٥۰۸٥ | ٤٥ | ۷٤۳٥ | ۳۰ | |
| | ٤۰ | ۲۷۰٥ | ۳٥۱ | ٥۳۱٥ | ۳۹۷ | ٤٦۸٥ | ٤٦ | ۷۳۹۰ | ۲۰ | |
| | ٥۰ | ۳۰٥٦ | ۳٤۹ | ٥۷۱۲ | ۳۹٥ | ٤۲۸۸ | ٤٥ | ۷۳٤٤ | ۱۰ | |
| ۲۰ | ۰۰ | ۳٤۰٥ | ۳٤٦ | ٦۱۰۷ | ۳۹۱ | ۳۸۹۳ | ٤۷ | ۷۲۹۹ | ۰۰ | ۷۰ |
| | ۱۰ | ۳۷٥۱ | ۳٤۲ | ٦٤۹۸ | ۳۸۹ | ۳٥۰۲ | ٤٦ | ۷۲٥۲ | ٥۰ | |
| | ۲۰ | ٤۰۹۳ | ۳٤۰ | ٦۸۸۷ | ۳۸۷ | ۳۱۱۳ | ٤۷ | ۷۲۰٦ | ٤۰ | |
| | ۳۰ | ٤٤۳۳ | ۳۳٦ | ۷۲۷٤ | ۳۸٤ | ۲۷۲٦ | ٤۸ | ۷۱٥۹ | ۳۰ | |
| | ٤۰ | ٤۷٦۹ | ۳۳۳ | ۷٦٥۸ | ۳۸۱ | ۲۳٤۲ | ٤۸ | ۷۱۱۱ | ۲۰ | |
| | ٥۰ | ٥۱۰۲ | ۳۳۱ | ۸۰۳۹ | ۳۷۹ | ۱۹٦۱ | ٤۸ | ۷۰٦۳ | ۱۰ | |
| ۲۱ | ۰۰ | ٥٤۳۳ | ۳۲۸ | ۸٤۱۸ | ۳۷٦ | ۱٥۸۲ | ٤۹ | ۷۰۱٥ | ۰۰ | ٦۹ |
| | ۱۰ | ٥۷٦۱ | ۳۲٤ | ۸۷۹٤ | ۳۷٤ | ۱۲۰٦ | ٤۹ | ٦۹٦٦ | ٥۰ | |
| | ۲۰ | ٦۰۸٥ | ۳۲۳ | ۹۱٦۸ | ۳۷۲ | ۰۸۳۲ | ٤۹ | ٦۹۱۷ | ٤۰ | |
| | ۳۰ | ٦٤۰۸ | ۳۱۹ | ۹٥٤۰ | ۳٦۹ | ۰٤٦۰ | ٥۰ | ٦۸٦۸ | ۳۰ | |
| | ٤۰ | ٦۷۲۷ | ۳۱۷ | ۹۹۰۹ | ۳٦۷ | ۰۰۹۱ | ٥۱ | ٦۸۱۸ | ۲۰ | |
| | ٥۰ | ۷۰٤٤ | ۳۱٤ | ٦۰۲۷٦ | ۳٦٥ | ۳۹۷۲٤ | ٥۰ | ٦۷٦۷ | ۱۰ | |
| ۲۲ | ۰۰ | ۷۳٥۸ | ۳۱۱ | ۰٦٤۱ | ۳٦۳ | ۹۳٥۹ | ٥۲ | ٦۷۱۷ | ۰۰ | ٦۸ |
| | ۱۰ | ۷٦٦۹ | ۳۰۹ | ۱۰۰٤ | ۳٦۰ | ۸۹۹٦ | ٥۱ | ٦٦٦٥ | ٥۰ | |
| | ۲۰ | ۷۹۷۸ | ۳۰٦ | ۱۳٦٤ | ۳٥۸ | ۸٦۳٦ | ٥۲ | ٦٦۱٤ | ٤۰ | |
| ۲۲ | ۳۰ | ۱,٥۸۲۸٤ | ۳۰٤ | ۱,٦۱۷۲۲ | ۳٥۷ | ۰,۳۸۲۷۸ | ٥۳ | ۱,۹٦٥٦۲ | ۳۰ | ٦۷ |
| درجه | دقیقه | تحب | | تمام مم | | مماس | | حب | دقیقه | درجه |

## اون دقیقه‌دن اون دقیقه‌یه آرتان قوسلرك انسابنك لغارتمه‌لری

| درجه | دقیقه | تف | محب | عام مم | تف | مماس | تف | حب | دقیقه | درجه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٦٧ | ٢٠ | ٥٣ | ١,٩٦٥٠٩ | ٠,٣٧٩٢١ | ٣٥٤ | ١,٦٢٠٧٩ | ٣٠١ | ١,٥٨٥٨٨ | ٤٠ | ٢٢ |
| | ١٠ | ٥٣ | ٦٤٥٦ | ٧٥٦٧ | ٣٥٢ | ٢٤٣٣ | ٢٩٩ | ٨٨٨٩ | ٥٠ | |
| ٦٧ | ٠٠ | ٥٤ | ٦٤٠٣ | ٧٢١٥ | ٣٥٠ | ٢٧٨٥ | ٢٩٦ | ٩١٨٨ | ٠٠ | ٢٣ |
| | ٥٠ | ٥٥ | ٦٣٤٩ | ٦٨٦٥ | ٣٤٩ | ٣١٣٥ | ٢٩٤ | ٩٤٨٤ | ١٠ | |
| | ٤٠ | ٥٤ | ٦٢٩٤ | ٦٥١٦ | ٣٤٦ | ٣٤٨٤ | ٢٩٢ | ٩٧٧٨ | ٢٠ | |
| | ٣٠ | ٥٥ | ٦٢٤٠ | ٦١٧٠ | ٣٤٥ | ٣٨٣٠ | ٢٨٩ | ٦٠٠٧٠ | ٣٠ | |
| | ٢٠ | ٥٦ | ٦١٨٥ | ٥٨٢٥ | ٣٤٢ | ٤١٧٥ | ٢٨٧ | ٠٣٥٩ | ٤٠ | |
| | ١٠ | ٥٦ | ٦١٢٩ | ٥٤٨٣ | ٣٤١ | ٤٥١٧ | ٢٨٥ | ٠٦٤٦ | ٥٠ | |
| ٦٦ | ٠٠ | ٥٦ | ٦٠٧٣ | ٥١٤٢ | ٣٣٩ | ٤٨٥٨ | ٢٨٣ | ٠٩٣١ | ٠٠ | ٢٤ |
| | ٥٠ | ٥٧ | ٦٠١٧ | ٤٨٠٣ | ٣٣٨ | ٥١٩٧ | ٢٨٠ | ١٢١٤ | ١٠ | |
| | ٤٠ | ٥٨ | ٥٩٦٠ | ٤٤٦٥ | ٣٣٥ | ٥٥٣٥ | ٢٧٩ | ١٤٩٤ | ٢٠ | |
| | ٣٠ | ٥٨ | ٥٩٠٢ | ٤١٣٠ | ٣٣٤ | ٥٨٧٠ | ٢٧٦ | ١٧٧٣ | ٣٠ | |
| | ٢٠ | ٥٨ | ٥٨٤٤ | ٣٧٩٦ | ٣٣٣ | ٦٢٠٤ | ٢٧٤ | ٢٠٤٩ | ٤٠ | |
| | ١٠ | ٥٨ | ٥٧٨٦ | ٣٤٦٣ | ٣٣٠ | ٦٥٣٧ | ٢٧٢ | ٢٣٢٣ | ٥٠ | |
| ٦٥ | ٠٠ | ٦٠ | ٥٧٢٨ | ٣١٣٣ | ٣٢٩ | ٦٨٦٧ | ٢٧٠ | ٢٥٩٥ | ٠٠ | ٢٥ |
| | ٥٠ | ٥٩ | ٥٦٦٨ | ٢٨٠٤ | ٣٢٨ | ٧١٩٦ | ٢٦٨ | ٢٨٦٥ | ١٠ | |
| | ٤٠ | ٦٠ | ٥٦٠٩ | ٢٤٧٦ | ٣٢٦ | ٧٥٢٤ | ٢٦٥ | ٣١٣٣ | ٢٠ | |
| | ٣٠ | ٦١ | ٥٥٤٩ | ٢١٥٠ | ٣٢٤ | ٧٨٥٠ | ٢٦٤ | ٣٣٩٨ | ٣٠ | |
| | ٢٠ | ٦١ | ٥٤٨٨ | ١٨٢٦ | ٣٢٣ | ٨١٧٤ | ٢٦٢ | ٣٦٦٢ | ٤٠ | |
| | ١٠ | ٦١ | ٥٤٢٧ | ١٥٠٣ | ٣٢١ | ٨٤٩٧ | ٢٦٠ | ٣٩٢٤ | ٥٠ | |
| ٦٤ | ٠٠ | ٦٢ | ٥٣٦٦ | ١١٨٢ | ٣٢٠ | ٨٨١٨ | ٢٥٨ | ٤١٨٤ | ٠٠ | ٢٦ |
| | ٥٠ | ٦٢ | ٥٣٠٤ | ٠٨٦٢ | ٣١٩ | ٩١٣٨ | ٢٥٦ | ٤٤٤٢ | ١٠ | |
| | ٤٠ | ٦٣ | ٥٢٤٢ | ٠٥٤٣ | ٣١٧ | ٩٤٥٧ | ٢٥٥ | ٤٦٩٨ | ٢٠ | |
| | ٣٠ | ٦٣ | ٥١٧٩ | ٠٢٢٦ | ٣١٥ | ٩٧٧٤ | ٢٥٢ | ٤٩٥٣ | ٣٠ | |
| | ٢٠ | ٦٤ | ٥١١٦ | ٢٩٩١١ | ٣١٥ | ٧٠٠٨٩ | ٢٥١ | ٥٢٠٥ | ٤٠ | |
| | ١٠ | ٦٤ | ٥٠٥٢ | ٩٥٩٦ | ٣١٣ | ٠٤٠٤ | ٢٤٩ | ٥٤٥٦ | ٥٠ | |
| ٦٣ | ٠٠ | ٦٥ | ٤٩٨٨ | ٩٢٨٣ | ٣١١ | ٠٧١٧ | ٢٤٧ | ٥٧٠٥ | ٠٠ | ٢٧ |
| | ٥٠ | ٦٥ | ٤٩٢٣ | ٨٩٧٢ | ٣١١ | ١٠٢٨ | ٢٤٥ | ٥٩٥٢ | ١٠ | |
| | ٤٠ | ٦٥ | ٤٨٥٨ | ٨٦٦١ | ٣٠٩ | ١٣٣٩ | ٢٤٤ | ٦١٩٧ | ٢٠ | |
| | ٣٠ | ٦٦ | ٤٧٩٣ | ٨٣٥٢ | ٣٠٧ | ١٦٤٨ | ٢٤١ | ٦٤٤١ | ٣٠ | |
| | ٢٠ | ٦٧ | ٤٧٢٧ | ٨٠٤٥ | ٣٠٧ | ١٩٥٥ | ٢٤٠ | ٦٦٨٢ | ٤٠ | |
| | ١٠ | ٦٧ | ٤٦٦٠ | ٧٧٣٨ | ٣٠٥ | ٢٢٦٢ | ٢٣٩ | ٦٩٢٢ | ٥٠ | |
| ٦٢ | ٠٠ | ٦٧ | ٤٥٩٣ | ٧٤٣٣ | ٣٠٥ | ٢٥٦٧ | ٢٣٧ | ٧١٦١ | ٠٠ | ٢٨ |
| | ٥٠ | ٦٨ | ٤٥٢٦ | ٧١٢٨ | ٣٠٣ | ٢٨٧٢ | ٢٣٥ | ٧٣٩٨ | ١٠ | |
| | ٤٠ | ٦٨ | ٤٤٥٨ | ٦٨٢٥ | ٣٠١ | ٣١٧٥ | ٢٣٣ | ٧٦٣٣ | ٢٠ | |
| | ٣٠ | ٦٩ | ٤٣٩٠ | ٦٥٢٤ | ٣٠١ | ٣٤٧٦ | ٢٣٢ | ٧٨٦٦ | ٣٠ | |
| | ٢٠ | ٦٩ | ٤٣٢١ | ٦٢٢٣ | ٣٠٠ | ٣٧٧٧ | ٢٣٠ | ٨٠٩٨ | ٤٠ | |
| | ١٠ | ٧٠ | ٤٢٥٢ | ٥٩٢٣ | ٢٩٨ | ٤٠٧٧ | ٢٢٩ | ٨٣٢٨ | ٥٠ | |
| ٦١ | ٠٠ | ٧٠ | ٤١٨٢ | ٥٦٢٥ | ٢٩٨ | ٤٣٧٥ | ٢٢٧ | ٨٥٥٧ | ٠٠ | ٢٩ |
| | ٥٠ | ٧١ | ٤١١٢ | ٥٣٢٧ | ٢٩٦ | ٤٦٧٣ | ٢٢٦ | ٨٧٨٤ | ١٠ | |
| | ٤٠ | ٧١ | ٤٠٤١ | ٥٠٣١ | ٢٩٥ | ٤٩٦٩ | ٢٢٤ | ٩٠١٠ | ٢٠ | |
| | ٣٠ | ٧٢ | ٣٩٧٠ | ٤٧٣٦ | ٢٩٤ | ٥٢٦٤ | ٢٢٢ | ٩٢٣٤ | ٣٠ | |
| | ٢٠ | ٧٢ | ٣٨٩٨ | ٤٤٤٢ | ٢٩٤ | ٥٥٥٨ | ٢٢١ | ٩٤٥٦ | ٤٠ | |
| | ١٠ | ٧٣ | ٣٨٢٦ | ٤١٤٨ | ٢٩٢ | ٥٨٥٢ | ٢٢٠ | ٩٦٧٧ | ٥٠ | |
| ٦٠ | ٠٠ | ٧٣ | ١,٩٣٧٥٣ | ٠,٣٣٨٥٦ | ٢٩١ | ١,٧٦١٤٤ | ٢١٨ | ١,٦٩٨٩٧ | ٠٠ | ٣٠ |
| درجه | دقیقه | | حب | مماس | | عام مم | | محب | دقیقه | درجه |

## اون دقیقه‌دن اون دقیقه‌یه آرتان قوسلرك انسابنك لغارتمه‌لری

| درجه | دقیقه | تف | تحب | تمام مم | تف | مماس | تف | حب | دقیقه | درجه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٥٩ | ٥٠ | ٧٤ | ١,٩٣٦٨٠ | ٠,٢٢٥٦٥ | ٢٩٠ | ١,٧٦٤٢٥ | ٢١٧ | ١,٧٠١١٥ | ١٠ | ٣٠ |
|  | ٤٠ | ٧٤ | ٣٦٠٦ | ٣٢٧٥ | ٢٩٠ | ٦٧٢٥ | ٢١٥ | ٠٣٣٢ | ٢٠ |  |
|  | ٣٠ | ٧٥ | ٣٥٢٢ | ٢٩٨٥ | ٢٨٨ | ٧٠١٥ | ٢١٤ | ٠٥٤٧ | ٣٠ |  |
|  | ٢٠ | ٧٥ | ٣٤٥٧ | ٢٦٩٧ | ٢٨٨ | ٧٣٠٣ | ٢١٢ | ٠٧٦١ | ٤٠ |  |
|  | ١٠ | ٧٥ | ٣٣٨٢ | ٢٤٠٩ | ٢٨٦ | ٧٥٩١ | ٢١١ | ٠٩٧٣ | ٥٠ |  |
| ٥٩ | ٠٠ | ٧٧ | ٣٣٠٧ | ٢١٢٣ | ٢٨٦ | ٧٨٧٧ | ٢٠٩ | ١١٨٤ | ٠٠ | ٣١ |
|  | ٥٠ | ٧٦ | ٣٢٣٠ | ١٨٣٧ | ٢٨٥ | ٨١٦٢ | ٢٠٩ | ١٣٩٣ | ١٠ |  |
|  | ٤٠ | ٧٧ | ٣١٥٤ | ١٥٥٢ | ٢٨٤ | ٨٤٤٨ | ٢٠٧ | ١٦٠٢ | ٢٠ |  |
|  | ٣٠ | ٧٨ | ٣٠٧٧ | ١٢٦٨ | ٢٨٣ | ٨٧٣٢ | ٢٠٥ | ١٨٠٩ | ٣٠ |  |
|  | ٢٠ | ٧٨ | ٢٩٩٩ | ٠٩٨٥ | ٢٨٢ | ٩٠١٥ | ٢٠٤ | ٢٠١٤ | ٤٠ |  |
|  | ١٠ | ٧٩ | ٢٩٢١ | ٠٧٠٣ | ٢٨٢ | ٩٢٩٧ | ٢٠٣ | ٢٢١٨ | ٥٠ |  |
| ٥٨ | ٠٠ | ٧٩ | ٢٨٤٠ | ٠٤٢١ | ٢٨١ | ٩٥٧٩ | ٢٠١ | ٢٤٢١ | ٠٠ | ٣٢ |
|  | ٥٠ | ٨٠ | ٢٧٦٢ | ٠١٤٠ | ٢٨٠ | ٩٨٦٠ | ٢٠١ | ٢٦٢٢ | ١٠ |  |
|  | ٤٠ | ٨٠ | ٢٦٨٢ | ١٩٨٦٠ | ٢٧٩ | ٨٠١٤٠ | ١٩٩ | ٢٨٢٣ | ٢٠ |  |
|  | ٣٠ | ٨١ | ٢٦٠٢ | ٩٥٨١ | ٢٧٨ | ٠٤١٩ | ١٩٧ | ٣٠٢٢ | ٣٠ |  |
|  | ٢٠ | ٨١ | ٢٥٢٢ | ٩٣٠٣ | ٢٧٨ | ٠٦٩٧ | ١٩٧ | ٣٢١٩ | ٤٠ |  |
|  | ١٠ | ٨٢ | ٢٤٤١ | ٩٠٢٥ | ٢٧٧ | ٠٩٧٥ | ١٩٥ | ٣٤١٦ | ٥٠ |  |
| ٥٧ | ٠٠ | ٨٢ | ٢٣٥٩ | ٨٧٤٨ | ٢٧٦ | ١٢٥٢ | ١٩٤ | ٣٦١١ | ٠٠ | ٣٣ |
|  | ٥٠ | ٨٣ | ٢٢٧٧ | ٨٤٧٢ | ٢٧٥ | ١٥٢٨ | ١٩٢ | ٣٨٠٥ | ١٠ |  |
|  | ٤٠ | ٨٣ | ٢١٩٤ | ٨١٩٧ | ٢٧٥ | ١٨٠٣ | ١٩٢ | ٣٩٩٧ | ٢٠ |  |
|  | ٣٠ | ٨٤ | ٢١١١ | ٧٩٢٢ | ٢٧٤ | ٢٠٧٨ | ١٩٠ | ٤١٨٩ | ٣٠ |  |
|  | ٢٠ | ٨٥ | ٢٠٢٧ | ٧٦٤٨ | ٢٧٤ | ٢٣٥٢ | ١٨٩ | ٤٣٧٩ | ٤٠ |  |
|  | ١٠ | ٨٥ | ١٩٤٢ | ٧٣٧٤ | ٢٧٣ | ٢٦٢٦ | ١٨٨ | ٤٥٦٨ | ٥٠ |  |
| ٥٦ | ٠٠ | ٨٥ | ١٨٥١ | ٧١٠١ | ٢٧٢ | ٢٨٩٩ | ١٨٧ | ٤٧٥٦ | ٠٠ | ٣٤ |
|  | ٥٠ | ٨٦ | ١٧٧٢ | ٦٨٢٩ | ٢٧١ | ٣١٧١ | ١٨٥ | ٤٩٤٣ | ١٠ |  |
|  | ٤٠ | ٨٧ | ١٦٨٦ | ٦٥٥٨ | ٢٧١ | ٣٤٤٢ | ١٨٥ | ٥١٢٨ | ٢٠ |  |
|  | ٣٠ | ٨٧ | ١٥٩٩ | ٦٢٨٧ | ٢٧١ | ٣٧١٣ | ١٨٣ | ٥٣١٣ | ٣٠ |  |
|  | ٢٠ | ٨٧ | ١٥١٢ | ٦٠١٦ | ٢٧٠ | ٣٩٨٤ | ١٨٢ | ٥٤٩٦ | ٤٠ |  |
|  | ١٠ | ٨٩ | ١٤٢٥ | ٥٧٤٦ | ٢٦٩ | ٤٢٥٤ | ١٨١ | ٥٦٧٨ | ٥٠ |  |
| ٥٥ | ٠٠ | ٨٨ | ١٣٣٦ | ٥٤٧٧ | ٢٦٨ | ٤٥٢٣ | ١٨٠ | ٥٨٥٩ | ٠٠ | ٣٥ |
|  | ٥٠ | ٩٠ | ١٢٤٨ | ٥٢٠٩ | ٢٦٨ | ٤٧٩١ | ١٧٩ | ٦٠٣٩ | ١٠ |  |
|  | ٤٠ | ٨٩ | ١١٥٨ | ٤٩٤١ | ٢٦٨ | ٥٠٥٩ | ١٧٧ | ٦٢١٨ | ٢٠ |  |
|  | ٣٠ | ٩١ | ١٠٦٩ | ٤٦٧٣ | ٢٦٧ | ٥٣٢٧ | ١٧٧ | ٦٣٩٥ | ٣٠ |  |
|  | ٢٠ | ٩١ | ٠٩٧٨ | ٤٤٠٦ | ٢٦٦ | ٥٥٩٤ | ١٧٥ | ٦٥٧٢ | ٤٠ |  |
|  | ١٠ | ٩١ | ٠٨٨٧ | ٤١٤٠ | ٢٦٦ | ٥٨٦٠ | ١٧٥ | ٦٧٤٧ | ٥٠ |  |
| ٥٤ | ٠٠ | ٩٢ | ٠٧٩٦ | ٣٨٧٤ | ٢٦٦ | ٦١٢٦ | ١٧٣ | ٦٩٢٢ | ٠٠ | ٣٦ |
|  | ٥٠ | ٩٣ | ٠٧٠٤ | ٣٦٠٨ | ٢٦٤ | ٦٣٩٢ | ١٧٣ | ٧٠٩٥ | ١٠ |  |
|  | ٤٠ | ٩٣ | ٠٦١١ | ٣٣٤٤ | ٢٦٥ | ٦٦٥٦ | ١٧١ | ٧٢٦٨ | ٢٠ |  |
|  | ٣٠ | ٩٤ | ٠٥١٨ | ٣٠٧٩ | ٢٦٤ | ٦٩٢١ | ١٧٠ | ٧٤٣٩ | ٣٠ |  |
|  | ٢٠ | ٩٤ | ٠٤٢٤ | ٢٨١٥ | ٢٦٣ | ٧١٨٥ | ١٦٩ | ٧٦٠٩ | ٤٠ |  |
|  | ١٠ | ٩٥ | ٠٣٣٠ | ٢٥٥٢ | ٢٦٣ | ٧٤٤٨ | ١٦٨ | ٧٧٧٨ | ٥٠ |  |
| ٥٣ | ٠٠ | ٩٦ | ٠٢٣٥ | ٢٢٨٩ | ٢٦٣ | ٧٧١١ | ١٦٧ | ٧٩٤٦ | ٠٠ | ٣٧ |
|  | ٥٠ | ٩٦ | ٠١٣٩ | ٢٠٢٦ | ٢٦٢ | ٧٩٧٤ | ١٦٧ | ٨١١٣ | ١٠ |  |
|  | ٤٠ | ٩٦ | ١,٩٠٠٤٣ | ١٧٦٤ | ٢٦٢ | ٨٢٣٦ | ١٦٥ | ٨٢٨٠ | ٢٠ |  |
| ٥٢ | ٣٠ | ٩٨ | ١,٨٩٩٤٧ | ٠,١١٥٠٢ | ٢٦١ | ١,٨٨٤٩٨ | ١٦٤ | ١,٧٨٤٤٥ | ٣٠ | ٣٧ |
| درجه | دقیقه |  | حب | مماس |  | تمام مم |  | تحب | دقیقه | درجه |

اون دقیقه‌دن اون دقیقه‌یه آرتان قوسلرك انسابنك لغارتمه‌لری

| درجه | دقیقه | جب | تف | مماس | تف | عام مم | تجب | تف | دقیقه | درجه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٣٧ | ٤٠ | ١,٧٨٦٠٩ | ١٦٣ | ١,٨٨٧٥٩ | ٢٦١ | ٠,١١٢٤١ | ١,٨٩٨٤٩ | ٠٩٧ | ٣٠ | ٥٢ |
| | ٥٠ | ٨٧٧٢ | ١٦٢ | ٩٠٢٠ | ٢٦١ | ٠٩٨٠ | ٩٧٥٢ | ٠٩٩ | ١٠ | |
| ٣٨ | ٠٠ | ٨٩٣٤ | ١٦١ | ٩٢٨١ | ٢٦٠ | ٠٧١٩ | ٩٦٥٣ | ٠٩٩ | ٠٠ | ٥٢ |
| | ١٠ | ٩٠٩٥ | ١٦١ | ٩٥٤١ | ٢٦٠ | ٠٤٥٩ | ٩٥٥٤ | ٠٩٩ | ٥٠ | |
| | ٢٠ | ٩٢٥٦ | ١٥٩ | ٩٨٠١ | ٢٦٠ | ٠١٩٩ | ٩٤٥٥ | ١٠١ | ٤٠ | |
| | ٣٠ | ٩٤١٥ | ١٥٨ | ٩٠٠٦١ | ٢٥٩ | ٠,٠٩٩٣٩ | ٩٣٥٤ | ١٠٠ | ٣٠ | |
| | ٤٠ | ٩٥٧٣ | ١٥٨ | ٠٣٢٠ | ٢٥٨ | ٩٦٨٠ | ٩٢٥٤ | ١٠٢ | ٢٠ | |
| | ٥٠ | ٩٧٣١ | ١٥٦ | ٠٥٧٨ | ٢٥٩ | ٩٤٢٢ | ٩١٥٢ | ١٠٢ | ١٠ | |
| ٣٩ | ٠٠ | ٩٨٨٧ | ١٥٦ | ٠٨٣٧ | ٢٥٨ | ٩١٦٣ | ٩٠٥٠ | ١٠٢ | ٠٠ | ٥١ |
| | ١٠ | ٨٠٠٤٣ | ١٥٤ | ١٠٩٥ | ٢٥٨ | ٨٩٠٥ | ٨٩٤٨ | ١٠٤ | ٥٠ | |
| | ٢٠ | ٠١٩٧ | ١٥٤ | ١٣٥٣ | ٢٥٧ | ٨٦٤٧ | ٨٨٤٤ | ١٠٣ | ٤٠ | |
| | ٣٠ | ٠٣٥١ | ١٥٣ | ١٦١٠ | ٢٥٨ | ٨٣٩٠ | ٨٧٤١ | ١٠٥ | ٣٠ | |
| | ٤٠ | ٠٥٠٤ | ١٥٢ | ١٨٦٨ | ٢٥٧ | ٨١٣٢ | ٨٦٣٦ | ١٠٥ | ٢٠ | |
| | ٥٠ | ٠٦٥٦ | ١٥١ | ٢١٢٥ | ٢٥٦ | ٧٨٧٥ | ٨٥٣١ | ١٠٦ | ١٠ | |
| ٤٠ | ٠٠ | ٠٨٠٧ | ١٥٠ | ٢٣٨١ | ٢٥٧ | ٧٦١٩ | ٨٤٢٥ | ١٠٦ | ٠٠ | ٥٠ |
| | ١٠ | ٠٩٥٧ | ١٤٩ | ٢٦٣٨ | ٢٥٦ | ٧٣٦٢ | ٨٣١٩ | ١٠٧ | ٥٠ | |
| | ٢٠ | ١١٠٦ | ١٤٨ | ٢٨٩٤ | ٢٥٦ | ٧١٠٦ | ٨٢١٢ | ١٠٧ | ٤٠ | |
| | ٣٠ | ١٢٥٤ | ١٤٨ | ٣١٥٠ | ٢٥٦ | ٦٨٥٠ | ٨١٠٥ | ١٠٩ | ٣٠ | |
| | ٤٠ | ١٤٠٢ | ١٤٧ | ٣٤٠٦ | ٢٥٥ | ٦٥٩٤ | ٧٩٩٦ | ١٠٩ | ٢٠ | |
| | ٥٠ | ١٥٤٩ | ١٤٥ | ٣٦٦١ | ٢٥٥ | ٦٣٣٩ | ٧٨٨٧ | ١٠٩ | ١٠ | |
| ٤١ | ٠٠ | ١٦٩٤ | ١٤٥ | ٣٩١٦ | ٢٥٥ | ٦٠٨٤ | ٧٧٧٨ | ١٠٩ | ٠٠ | ٤٩ |
| | ١٠ | ١٨٣٩ | ١٤٤ | ٤١٧١ | ٢٥٥ | ٥٨٢٩ | ٧٦٦٨ | ١١١ | ٥٠ | |
| | ٢٠ | ١٩٨٣ | ١٤٣ | ٤٤٢٦ | ٢٥٥ | ٥٥٧٤ | ٧٥٥٧ | ١١١ | ٤٠ | |
| | ٣٠ | ٢١٢٦ | ١٤٣ | ٤٦٨١ | ٢٥٤ | ٥٣١٩ | ٧٤٤٦ | ١١٢ | ٣٠ | |
| | ٤٠ | ٢٢٦٩ | ١٤١ | ٤٩٣٥ | ٢٥٥ | ٥٠٦٥ | ٧٣٣٤ | ١١٣ | ٢٠ | |
| | ٥٠ | ٢٤١٠ | ١٤١ | ٥١٩٠ | ٢٥٤ | ٤٨١٠ | ٧٢٢١ | ١١٤ | ١٠ | |
| ٤٢ | ٠٠ | ٢٥٥١ | ١٤٠ | ٥٤٤٤ | ٢٥٤ | ٤٥٥٦ | ٧١٠٧ | ١١٤ | ٠٠ | ٤٨ |
| | ١٠ | ٢٦٩١ | ١٣٩ | ٥٦٩٨ | ٢٥٤ | ٤٣٠٢ | ٦٩٩٣ | ١١٤ | ٥٠ | |
| | ٢٠ | ٢٨٣٠ | ١٣٨ | ٥٩٥٢ | ٢٥٣ | ٤٠٤٨ | ٦٨٧٩ | ١١٦ | ٤٠ | |
| | ٣٠ | ٢٩٦٨ | ١٣٨ | ٦٢٠٥ | ٢٥٤ | ٣٧٩٥ | ٦٧٦٣ | ١١٦ | ٣٠ | |
| | ٤٠ | ٣١٠٦ | ١٣٦ | ٦٤٥٩ | ٢٥٣ | ٣٥٤١ | ٦٦٤٣ | ١١٧ | ٢٠ | |
| | ٥٠ | ٣٢٤٢ | ١٣٦ | ٦٧١٢ | ٢٥٤ | ٣٢٨٨ | ٦٥٣٠ | ١١٧ | ١٠ | |
| ٤٣ | ٠٠ | ٣٣٧٨ | ١٣٥ | ٦٩٦٦ | ٢٥٣ | ٣٠٣٤ | ٦٤١٣ | ١١٨ | ٠٠ | ٤٧ |
| | ١٠ | ٣٥١٣ | ١٣٥ | ٧٢١٩ | ٢٥٣ | ٢٧٨١ | ٦٢٩٥ | ١١٩ | ٥٠ | |
| | ٢٠ | ٣٦٤٨ | ١٣٣ | ٧٤٧٢ | ٢٥٣ | ٢٥٢٨ | ٦١٧٦ | ١٢٠ | ٤٠ | |
| | ٣٠ | ٣٧٨١ | ١٣٣ | ٧٧٢٥ | ٢٥٣ | ٢٢٧٥ | ٦٠٥٦ | ١٢٠ | ٣٠ | |
| | ٤٠ | ٣٩١٤ | ١٣٢ | ٧٩٧٨ | ٢٥٣ | ٢٠٢٢ | ٥٩٣٦ | ١٢١ | ٢٠ | |
| | ٥٠ | ٤٠٤٦ | ١٣١ | ٨٢٣١ | ٢٥٣ | ١٧٦٩ | ٥٨١٥ | ١٢٢ | ١٠ | |
| ٤٤ | ٠٠ | ٤١٧٧ | ١٣١ | ٨٤٨٤ | ٢٥٣ | ١٥١٦ | ٥٦٩٣ | ١٢٢ | ٠٠ | ٤٦ |
| | ١٠ | ٤٣٠٨ | ١٢٩ | ٨٧٣٧ | ٢٥٢ | ١٢٦٣ | ٥٥٨١ | ١٢٣ | ٥٠ | |
| | ٢٠ | ٤٤٣٧ | ١٢٩ | ٨٩٨٩ | ٢٥٣ | ١٠١١ | ٥٤٤٨ | ١٢٤ | ٤٠ | |
| | ٣٠ | ٤٥٦٦ | ١٢٨ | ٩٢٤٢ | ٢٥٣ | ٠٧٥٨ | ٥٣٢٤ | ١٢٤ | ٣٠ | |
| | ٤٠ | ٤٦٩٤ | ١٢٨ | ٩٤٩٥ | ٢٥٢ | ٠٥٠٥ | ٥٢٠٠ | ١٢٦ | ٢٠ | |
| | ٥٠ | ٤٨٢٢ | ١٢٧ | ٩٧٤٧ | ٢٥٣ | ٠٢٥٣ | ٥٠٧٤ | ١٢٥ | ١٠ | |
| ٤٥ | ٠٠ | ١,٨٤٩٤٩ | | ٠,٠٠٠٠٠ | | ٠,٠٠٠٠٠ | ١,٨٤٩٤٩ | | ٠٠ | ٤٥ |
| درجه | دقیقه | تجب | | عام مم | | مماس | جب | | دقیقه | درجه |

تنبيه — ایکنجی انساب جدولنك صورت استعمالی

ویریلان ۹۲° ۱۸َ ۳۵ً قوسك جیبنك لغارتمه‌سنی تعیین ایتمك

ایچون ۱۸َ ۳۵ً قسمی یکرمی دقیقه‌یه یقین یعنی اون دقیقـه ایله

یکرمی دقیقه آره‌سنده بولندیغندن لع حب ۲۹° ۱۰َ = ۱,٦٨٧٨٤

آلنوب بعده تفاضل ستوننـده بولنان ۲۲٦ عددی ۱۰ دقیقه

آرتان قوسك جیبنك لغارتمه‌سی متزایدی اولدیغندن بروجه آتی

نسبت تنظیم اولنور .

۱۰ : ۰,۰۰۲۲٦ = ۸َ ۳۵ً : س یاخود ثانیه‌یه تحویل ایله

٦۰ × ۱۰ : ۰,۰۰۲۲٦ = ۳۵ً + ٦۰ × ۸ : س

س = ۰,۰۰۱۹٤ اولوب اشبو مقدار ۲۹° ۱۰َ لق قوسك

جیبنك بالاده کوستریلان لغارتمه‌سنه ضم اولندقده

لع حب ۲۹° ۱۰َ = ۱,٦٨٧٨٤

۸َ ۳۵ً ایچون = ۱۹٤

---

لع حب ۲۹° ۱۸َ ۳۵ً = ۱,٦٨٩٧٨ اولمش اولور.

واکر لع محب ۳۵° ۲۷َ ٤۲ً = س ویریلور ایسه

اشبو مقدار ۳۵° ۲۰َ ایله ۳۵° ۳۰َ بیننده بولندیغندن جدولدن

لع محب ۳۵° ۲۰َ = ۱,۹۱۱۵۸ آلنوب بعـده تفاضل ستوننده

۸۹ فضلی آلنه‌رق

۱۰ : ۰٫۰۰۰۸۹ = ۷ ۴۲ : س   یاخود ثانیه‌یه تحویل ایله

۶۰ × ۱۰ : ۰٫۰۰۰۸۹ = ۴۲ + ۶۰ × ۷ : س

س = ۰٫۰۰۰۶۹۵ اولوب بعده اشبو مقدار ۲۰ ۳۵ لق قوسك لغارتمه‌سندن طرح اولندقده

لع مجب ۲۰ ۳۵ = ۱٫۹۱۱۶۵۸۰

۷ ۴۲+ ایچون = — ۰٫۰۰۰۶۹۵

لع مجب ۴۲ ۲۷ ۳۵ = ۱٫۹۱۰۸۸۵ اولمش اولور.

فرق بش درجه‌دن زیاده قوسلر صول طرف ستونده آشاغیدن یوقاری اوقونور .

﴿ حلی مطلوب مسائل ﴾

اوچنجی فصل اوزرینه امثله

۱ — اعطا اولنان هر قنغی بر قوسی برنجی ربع دائره‌یه ارجاع ایتمك .

۲ — جب ه = ۳/۴ ، فع ه = √۳ ایکن سائر مثلثات خطلرینی بولمق .

۳ — تم ه = ۳/۴ ، ظع ه = ۳ ، ایکن سائر مثلثات خطلرینی بولمق .

۴ — ۱۰۵ ، ۱۲۰ درجه‌لك قوسلرك مثلثات خطلرینی بولمق .

٥ — حس (ب — ح) = ١/٢ ، تحس (ب + ح) = ١/٢ ، ايكن ب ح قوسلرینی بولمق.

٦ — حس ب = ١/٤ ، تحس ح = ٣/٥ ، ايكن (ب ± ح) مجموع جبريسنك جيب وتجيبنك حسابی.

٧ — حس ب = ٤/٥ ، ايكن حس ٢ ب ، تحس ٢ ب ، ظ ٢ ب ، حساب ايتمك.

٨ — تحس ٣٠° = ١/٢ √٣ ايكن حس ١٥° ، تحس ١٥° ، ظ ١٥° ، حساب ايتمك.

٩ — حس ١٢″ ٢٤′ ٣٤° ± حس ٢٨″ ١٤′ ١٢° تعبيرينك لغارتمه ايله حلی.

١٠ — تحس ٤″ ٥٦′ ٢٧° ± تحس ٤″ ١٧′ ٤٥° تعبيرينك لغارتمه ايله حلی.

١١ — ١ ± حس ٤٤″ ٣٢′ ٢٠° ، ١ ± ظ ٦″ ٩′ ٤٣° تعبيرلرينك لغارتمه ايله حلی.

١٢ — حس ٢٠″ ٢٤′ ٧° ، تحس ٤٠″ ١٥′ ٢٤° ، ظ ٢٠″ ٤٥′ ٢١° لغارتمه‌لرینی بولمق.

١٣ — حس ٣٠″ ٢٧′ ١٦٤° ، حس ٢٣″ ٤٥′ ٢٠٨° ، تحس ١٠″ ٣٥′ ١٢٠° لغارتمه‌لرینی بولمق.

١٤ — لع حس س = ١̅,٤٠٨٨٩ ، لع تحس س = ١̅,٨١٤٩٤ ايكن مقدار قوسلرینی بولمق.

١٥ — لع مم س = ١̅,٨٨٢٠١، لع عم س = ١̅,٠٥٩٢٦ ايكن مقدار قوسلرینی بولمق.

١٦ — حس س = ٣/٥، مم س = ٣، قع س = ٧/٢، عم س = — ٥/٧ ايكن مقدار قوسلرینی بولمق.

١٧ — مم س = حس ٤٨ً ٢٤َ ١٢° + محس ٤٨ً ٢٤َ ١٢° ايكن س زاویه‌سنی بولمق.

١٨ — مم س = ٥ حس س = ٦ محس² س ، ٢ مم س + ٢ عم س = ٥ ايكن (س)ك حلی.

دردنجی فصل اوزرینه امثله

١٩ — فوق الافق شمس ٣٠َ ٢٥° ارتفاعنده ايكن بر قله‌نك افقی کولکه‌سنك طولی ٩٦ متره اولدیغی معلوم ايكن ارتفاعنی حساب ایتمك.

٢٠ — شمس فوق الافق ٣٠َ ٣٧° ارتفاعنده ايكن ١٥ متره ارتفاعنده اولان اغاجك سطح افقی اوزرنده‌کی کولکه‌سنی حساب ایتمك.

٢١ — عمودی بر صیریغك سطح افقی اوزرنده‌کی کولکه‌سی ارتفاعنك ٢,٥ مثلی ايكن ارتفاع شمسی حساب ایتمك.

٢٢ — نصف قطری ٨,٣٥ متره اولان دائره داخلنه مرسوم ٧، ٩، ١٧، ٢٥ ضلعلی شکل منتظملرك بر ضلعنك طولنی حساب ایتمك.

## بشنجی فصل اوزرینه مسائل

٢٣ — بری برندن ١٧٥٠ متره مسافه‌ده بولنان ایکی راصد بربلوطك م نقطهٔ معلومه‌سنك سطح شاقولیده ارتفاع زاویه‌لرینی ٧٢°، ٨٤° بولدقلری حالده بلوطك ارتفاعنی حساب ایتمك.

٢٤ — سطح بحردن ١٢٠ متره مرتفع محلده‌كی راصدك افق حسی‌یه امتداد ایدن خط شعاعنك خط شاقولیله احداث ایتدیكی انحطاط زاویه‌سی ٨٩° ٢٠َ اولدیغی معلوم اوله‌رق نصف قطر ارضی حساب ایتمك.

٢٥ — مجموع اضلاعی ٢ھ = ١٢٥٤,٣٤٥، وزوایاسندن ب = ٢٨,٦ ٣٥َ ٩٨°، ح = ١٨,٨ ٣٩َ ٤٢° اولان مثلثی ترسیم ایتمك.

٢٦ — اضلاع ثلثه‌سی ٢٤٩، ٣٣٢، ١٥ متره اولان مثلثك خارجنه وداخلنه مرسوم دائره‌سی نصف قطرینی حساب ایتمك.

٢٧ — اضلاع ثلثه‌سی معلوم اولان مثلثك برزاویه‌سنك خط منصفنی وقطرینی حساب ایتمك.

٢٨ — حس ب معلوم ایكن حس^٢ ب حس^٣ ب حس^٤ ب .... یی رسم ایتمك.

٢٩ — م = ھ/٢ = √٢ — ١ ایكن حس ھ، محس ھ، م ھ تابعلرینك حسابی.

٣٠ — حس ب = ٣/٥، حس ح = ١٢/١٣، حس د = ٧/٢٥ معلوم ایكن حس (ب+ح+د) تعبیرینی حساب ایتمك.

**٣١** — ب + ح + د = π ایکن مم ب + مم ح + مم د =
مم ب مم ح مم د اولدیغنك تحقیق.

**٣٢** — مم ٢ س = ٣ مم س ، مم س + ٣ مم س =
٤ ، مم س + م ه مم س = م + ه ، مم س  مم س =
١ ، حس ٥ س = حس ٧ س معادله‌لرنده س قوسنی برنجی
ربعده تعیین ایتمك .



